Université Claude Bernard Lyon 1 — PCSI L2 UE Math4

Année universitaire 2018/2019

Printemps 2019

CC3 du 12.04.2019
Durée : 60 min

Les calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On apportera un soin particulier à la présentation. Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1 Le but de cet exercice est de calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie, pour tout $x \neq 0$, par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} e^{-|x|}.$$

Soit $[-1,1]$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[-1,1]$, c'est-à-dire que

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de $\frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$.
2. Grace à la formule d'inversion de la transformée de Fourier, en déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.
3. Calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-|x|}$.
4. **Question bonus :** On rappelle que si f_1 et f_2 sont deux fonctions de carré intégrable, alors la transformée de Fourier de leur produit est donnée par $\mathcal{F}[f_1 f_2] = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[f_1]) * (\mathcal{F}[f_2])$.
   En conclure que
   $$\mathcal{F}[f](p) = \arctan(p+1) - \arctan(p-1).$$

Exercice 2 Calculer la dérivée au sens des distributions

1. du produit $\sin(x)\chi_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(x)$
2. des produits $\sin(x)\delta_0$ et $\cos(x)\delta_0$, où δ_0 est la distribution de Dirac en 0.
3. **Question bonus :** donner la dérivée seconde des distributions des deux questions précédentes.