FICHE TD 2 – Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1 En utilisant le théorème de convergence dominée, calculer la limite quand $n \to \infty$ des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^n + e^x}$, (c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(nx)}{nx + x^2}\,dx$, (d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{n\,\log(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}\,dx$,

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$.

Exercice 2 Pour $p > 0$, soit

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-px}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Le but est de calculer $F(p)$ en passant par sa dérivée.

1. Montrer que l'intégrale dans la définition de $F(p)$ est convergente pour tout $p > 0$.
2. Soit $p_0 > 0$. Montrer que $F'(p)$ existe pour tout $p \geqslant p_0$. En déduire que $F'(p)$ existe pour tout $p > 0$.
3. Vérifier, en dérivant, que
$$\frac{p\sin x + \cos x}{1+p^2}e^{-px}$$
est une primitive de $-e^{-px}\sin x$, puis calculer $F'(p)$.
4. En déduire que $F(p) = -\arctan p + C$ pour une constante $C \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que
$$C = \lim_{p\to+\infty}(F(p) + \arctan p) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3 Dérivation des intégrales à paramètres.

Soit $f(x) \coloneqq \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{1+t^4}\,dt$.

1. Montrer que l'intégrale définissant $f(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la k-ième dérivée $f^{(k)}(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que f vérifie l'équation différentielle : $f^{(4)}(x) + f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exercice 4 Étude de la fonction Γ d'Euler.

Soit $\Gamma(x) \coloneqq \displaystyle\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

1. Montrer que Γ est définie et continue sur $[a,b]$, pour tout $b > a > 0$. En déduire que Γ est définie et continue sur $]0;\infty[$.
2. Montrer que $\forall x \in]0;\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Exprimer $\Gamma'(x)$ à l'aide d'une intégrale paramétrique.

Exercice 5 Soit $F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = \dfrac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} F(x,y)dxdy$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} F(x,y)dydx = \frac{\pi}{2}$.
3. Montrer que $F(x,y) = \dfrac{1}{x^2-1}\left(\dfrac{x}{(1+x^2y)} - \dfrac{1}{(1+y)}\right)$.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{(1+x^2y)} - \frac{1}{(1+y)}\right)dy = 2\ln x$.
5. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}dx = \frac{\pi}{4}$.