

### FICHE TD 3 – Produit de convolution

EXERCICE 1 - *Fonctions indicatrices (caractéristique)*. Soit  $I \subset \mathbb{R}$  et

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

la fonction indicatrice (ou caractéristique) sur  $I$ .

1. On pose  $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Etablir par calcul direct que  $\chi_I \star \chi_I$  est une fonction continue, qui est linéaire par morceau. Tracer son graphe.
2. On pose  $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Etablir par calcul direct que  $\chi_I \star \chi_I \star \chi_I$  est une fonction dérivable, qui est quadratique par morceau. Tracer son graphe.
3. Soit  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$  si  $x \neq 0$  et  $h(0) = 0$ . Etablir par calcul direct que  $\chi_{[-1,1]} \star h$  est continue.

EXERCICE 2 Soit  $f_a(x) = e^{ax}$ . Justifier l'existence et calculer les produits de convolution pour des valeurs  $a, b$  réelles:

- (a)  $(f_a \chi_{[0,+\infty[}) \star (f_b \chi_{[0,+\infty[})$ ,
- (b)  $\chi_{[-a,a]} \star (f_b \chi_{[0,+\infty[})$ ,
- (c)  $(\chi_{[-a,a]} \star f_b) \chi_{[0,+\infty[}$

EXERCICE 3 - *Convolution de Gaussiennes*.

Pour  $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , on considère la fonction  $g_{m,\sigma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$g_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

On admet que  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ .

1. Calculer  $\int_{-\infty}^{+\infty} g_{m,\sigma}(x) dx$ .
2. Montrer que  $g_{p,\sigma} \star g_{q,\tau} = g_{p+q, \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}}$ .