TD Transformée de Fourier

Exercice 1.

Pour $t > 0$, on pose $q_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$

Calculer la transformée de Fourier de q_t. En déduire que $q_t * q_s = q_{t+s}$.

Correction exercice1

$$\widehat{q_t}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx-\frac{x^2}{4t}} dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+4ptx}{4t}} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+2pt)^2-4p^2t^2}{4t}} dx = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{4p^2t^2}{4t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+2pt)^2}{4t}} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{4p^2t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(\frac{x+2pt}{\sqrt{2t}}\right)^2}{2}} dx$$

Puis on fait le changement de variable $y = \frac{x+2pt}{\sqrt{2t}}$ donc $x = \sqrt{2t}y - 2pt$ et $dx = \sqrt{2t}dy$ et les bornes ne changent pas.

$$\widehat{q_t}(p) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{4p^2t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \sqrt{2t} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{4p^2t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = e^{4p^2t}$$
$$\widehat{q_t}(p)\widehat{q_s}(p) = e^{4p^2t}e^{4p^2s} = e^{4p^2(t+s)} = \widehat{q_{t+s}}(p) \Leftrightarrow \widehat{q_t * q_s}(p) = \widehat{q_{t+s}}(p)$$

Et avec la formule de la transformée inverse on a

$$q_t * q_s = q_{t+s}$$

Exercice 2.

Pour $(m,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, on considère la fonction $g_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de $g_{0,1}$.
2. Calculer la transformée de Fourier de $g_{m,\sigma}$.

Correction exercice2

1.

$$\widehat{g_{0,1}}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}-ixy} dy$$
$$-\frac{y^2}{2} - ixy = -\frac{1}{2}(y^2 + 2ixy) = -\frac{1}{2}((y+ix)^2 - (ix)^2) = -\frac{1}{2}((y+ix)^2 + x^2)$$
$$= -\frac{1}{2}(y+ix)^2 - \frac{x^2}{2}$$
$$\widehat{g_{0,1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(y+ix)^2-\frac{x^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y+ix)^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y+ix)^2}{2}} dy$$

On fait le changement de variable $z = y + ix$ donc $dy = dz$, pour les bornes il y a une difficulté que l'on passera sous silence pour l'instant. Bref, elles ne changent pas

$$\widehat{g_{0,1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{2\pi} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

2.

$$\widehat{g_{m,\sigma}}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} e^{-ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)^2}{2}} e^{-ixy} dy$$

On fait le changement de variable

$$t = \frac{y-m}{\sigma} \Leftrightarrow y = \sigma t + m \Rightarrow dy = \sigma dt$$

Les bornes ne changent pas

$$\widehat{g_{m,\sigma}}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-ix(\sigma t+m)}\sigma dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-ix\sigma t}e^{-ixm}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ixm}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-ix\sigma t}dt$$

$$=e^{-ixm}\widehat{g_{0,1}}(x\sigma)=e^{-ixm}e^{-\frac{\sigma^2x^2}{2}}=e^{-\frac{\sigma^2x^2}{2}-imx}$$

Exercice 3.

Soit $\alpha>0$,, on pose $f(x)=e^{-\alpha|x|}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de f.
2. A l'aide de la formule de réciprocité, en déduire la transformée de Fourier de $x\to\frac{1}{1+x^2}$.
3. Calculer $f*f$, calculer ainsi la transformée de Fourier de $x\to\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
4. Déterminer la transformée de Fourier de $x\to\frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Correction exercice3

1.

$$\hat{f}(x)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\alpha|y|}e^{-ixy}dy=\int_{-\infty}^{0}e^{-\alpha|y|}e^{-ixy}dy+\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha|y|}e^{-ixy}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha y}e^{-ixy}dy+\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha y}e^{-ixy}dy=\int_{-\infty}^{0}e^{(\alpha-ix)y}dy+\int_{0}^{+\infty}e^{-(\alpha+ix)y}dy$$

$$=\left[\frac{e^{(\alpha-ix)y}}{\alpha-ix}\right]_{-\infty}^{0}+\left[\frac{e^{-(\alpha+ix)y}}{-(\alpha+ix)}\right]_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\alpha-ix}+\frac{1}{\alpha+ix}=\frac{\alpha+ix+\alpha-ix}{\alpha^2+x^2}=\frac{2\alpha}{\alpha^2+x^2}$$

Car

$$\lim_{y\to-\infty}e^{(\alpha-ix)y}=0\quad\text{et}\quad\lim_{y\to+\infty}e^{-(\alpha+ix)y}=0$$

2. Soit f définie par

$$f(x)=e^{-|x|}$$

Alors d'après la question 1. avec $\alpha=1$

$$\hat{f}(x)=\frac{2}{1+x^2}=2\times\frac{1}{1+x^2}$$

La formule d'inversion donne

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{iyx}\hat{f}(y)dy=\frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-x)$$

On l'applique à f et on pose $g\colon x\to\frac{1}{1+x^2}$

$$\hat{g}(x)=\frac{1}{2}\hat{\hat{f}}(x)=\frac{1}{2}\times 2\pi f(-x)=\pi e^{-|x|}$$

3.

$$f\star f(x)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\alpha|y|}e^{-\alpha|x-y|}dy=\int_{\mathbb{R}}e^{-\alpha(|y|+|x-y|)}dy$$

Si $x\le 0$

$$f\star f(x)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\alpha(|y|+|x-y|)}dy=\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(|y|+|x-y|)}dy+\int_{x}^{0}e^{-\alpha(|y|+|x-y|)}dy+\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha(|y|+|x-y|)}dy$$

Dans la première intégrale $y\le x\le 0$ donc $|y|=-y$ et $|x-y|=x-y$

Dans la seconde intégrale $x\le y\le 0$ donc $|y|=-y$ et $|x-y|=-x+y$

Dans la troisième intégrale $x\le 0\le y$ donc $|y|=y$ et $|x-y|=-x+y$

Donc

$$f\star f(x)=\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha(-y+x-y)}dy+\int_{x}^{0}e^{-\alpha(-y-x+y)}dy+\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha(y-x+y)}dy$$
$$=\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha x+2\alpha y}dy+\int_{x}^{0}e^{\alpha x}dy+\int_{0}^{+\infty}e^{-2\alpha y+\alpha x}dy$$
$$=e^{-\alpha x}\int_{-\infty}^{x}e^{2\alpha y}dy+e^{\alpha x}\int_{x}^{0}dy+e^{\alpha x}\int_{0}^{+\infty}e^{-2\alpha y}dy$$
$$=e^{-\alpha x}\left[\frac{e^{2\alpha y}}{2\alpha}\right]_{-\infty}^{x}+e^{\alpha x}(-x)+e^{\alpha x}\left[\frac{e^{-2\alpha y}}{-2\alpha}\right]_{0}^{+\infty}=e^{-\alpha x}\frac{e^{2\alpha x}}{2\alpha}-xe^{\alpha x}+e^{\alpha x}\frac{1}{2\alpha}$$
$$=\frac{e^{\alpha x}}{2\alpha}-xe^{\alpha x}+\frac{e^{\alpha x}}{2\alpha}=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}-xe^{\alpha x}$$
Si $x\geq 0$
$$f\star f(x)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\alpha(|y|+|x-y|)}dy=\int_{-\infty}^{0}e^{-\alpha(|y|+|x-y|)}dy+\int_{0}^{x}e^{-\alpha(|y|+|x-y|)}dy+\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha(|y|+|x-y|)}dy$$
Dans la première intégrale $y\leq 0\leq x$ donc $|y|=-y$ et $|x-y|=x-y$
Dans la seconde intégrale $0\leq y\leq x$ donc $|y|=y$ et $|x-y|=x-y$
Dans la troisième intégrale $0\leq x\leq y$ donc $|y|=y$ et $|x-y|=-x+y$
Donc
$$f\star f(x)=\int_{-\infty}^{0}e^{-\alpha(-y+x-y)}dy+\int_{0}^{x}e^{-\alpha(y+x-y)}dy+\int_{x}^{+\infty}e^{-\alpha(y-x+y)}dy$$
$$=\int_{-\infty}^{0}e^{-\alpha x+2\alpha y}dy+\int_{0}^{x}e^{-\alpha x}dy+\int_{x}^{+\infty}e^{-2\alpha y+\alpha x}dy$$
$$=e^{-\alpha x}\int_{-\infty}^{0}e^{2\alpha y}dy+e^{-\alpha x}\int_{0}^{x}dy+e^{\alpha x}\int_{x}^{+\infty}e^{-2\alpha y}dy$$
$$=e^{-\alpha x}\left[\frac{e^{2\alpha y}}{2\alpha}\right]_{-\infty}^{0}+xe^{-\alpha x}+e^{\alpha x}\left[\frac{e^{-2\alpha y}}{-2\alpha}\right]_{x}^{+\infty}=\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha x}+xe^{-\alpha x}+e^{\alpha x}\frac{e^{-2\alpha x}}{2\alpha}$$
$$=\frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha}+xe^{-\alpha x}+\frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha}=\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}+xe^{-\alpha x}$$
Donc
$$f\star f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}-xe^{\alpha x} & \text{si } x\leq 0\\ \dfrac{e^{-\alpha x}}{\alpha}+xe^{-\alpha x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$
Pour $\alpha=1$
$$f\star f(x)=\begin{cases}e^{x}-xe^{x} & \text{si } x\leq 0\\ e^{-x}+xe^{-x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

D'autre part pour $\alpha=1$
$$\widehat{f\star f}(x)=\hat{f}(x)\hat{f}(x)=\frac{4}{(1+x^2)^2}$$
Et on pose $h(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}$
A l'aide du théorème d'inversion appliqué à $\widehat{f\star f}$ avec
$$\widehat{\widehat{f\star f}}(x)=2\pi f\star f(-x)\Rightarrow f\star f(x)=\frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{f\star f}}(-x)=\frac{1}{2\pi}\widehat{4h}(-x)=\frac{4}{2\pi}\hat{h}(-x)$$
Par conséquent
$$\hat{h}(x)=\frac{\pi}{2}f\star f(-x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}(e^{-x}+xe^{-x}) & \text{si } x\leq 0\\ \dfrac{\pi}{2}(e^{x}-xe^{x}) & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

4. On rappelle que :

$$\widehat{g'}(x) = ix\hat{g}(x)$$

On appelle g la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Donc

$$\widehat{g'}(x) = ix\hat{g}(x) \Leftrightarrow -2\widehat{\frac{x}{(1+x^2)^2}}(x) = ix\widehat{\frac{1}{1+x^2}}(x) = ix\pi e^{-|x|} \Rightarrow \widehat{\frac{x}{(1+x^2)^2}}(x)$$
$$= -\frac{1}{2}ix\widehat{\frac{1}{1+x^2}}(x) = -i\frac{x\pi}{2}e^{-|x|}$$

Exercice 4.

Soit l'équation intégrale, pour $0 < a < b$ et f absolument intégrable.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2} dt = \frac{1}{x^2 + b^2} \quad (1)$$

Exprimer cette équation sous forme d'une équation de convolution, déterminer la transformation de Fourier de f et en déduire f. On utilisera le résultat de l'exercice 3.1. et on pose pour $\alpha > 0$:

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2} \text{ et } f_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|}$$

1. Déterminer la transformée de Fourier de f_α, puis celle de g_α.
2. Résoudre (1).

Correction exercice4

1.

D'après l'exercice 3.1. si on pose $f_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|}$

$$(1) \Leftrightarrow \widehat{f_\alpha}(x) = \frac{2a}{x^2 + a^2} = 2\alpha\frac{1}{x^2 + \alpha^2} = 2\alpha g_\alpha(x)$$

D'après la formule de réciprocité

$$\widehat{g_\alpha}(p) = \frac{1}{2\alpha}\widehat{\widehat{f_\alpha}}(p) = \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{2\pi}f_\alpha(-p) = \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{2\pi}e^{-\alpha|-p|} = \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{2\pi}e^{-\alpha|p|}$$

2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_a(x-t) dt = f * g_a(x)$$
$$(1) \Leftrightarrow f * g_a(x) = g_b(x) \Leftrightarrow \widehat{f * g_a}(p) = \widehat{g_b}(p) \Leftrightarrow \hat{f}(p)\widehat{g_a}(p) = \widehat{g_b}(p)$$

Donc

$$\hat{f}(p)\widehat{g_a}(p) = \widehat{g_b}(p) \Leftrightarrow \hat{f}(p)\frac{1}{2a}\frac{1}{2\pi}e^{-a|p|} = \frac{1}{2b}\frac{1}{2\pi}e^{-b|p|} \Leftrightarrow \hat{f}(p) = \frac{a}{b}e^{(a-b)|p|} = \frac{a}{b}f_{a-b}(p)$$

On a bien $a - b < 0$.

$$\hat{\hat{f}}(x) = \frac{a}{b}\widehat{f_{a-b}}(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}f(-x) = \frac{a}{b}\frac{2(a-b)}{(a-b)^2 + x^2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{4\pi a}{b}\frac{a-b}{(a-b)^2 + x^2}$$

Exercice 5.

On pose $f(x) = e^{-x}H(x)$ où H est la fonction de Heavyside.

1. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f.
2. Est-ce que $\hat{f}$ est absolument intégrable ? Vérifier que $\hat{f}$ est de carré intégrable.

3. A l'aide de la formule de Plancherel calculez :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+p^2} dp$$

Correction exercice5

1.

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} e^{-x} \chi_{[0,+\infty[}(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{(-ip-1)x} dx = \left[\frac{e^{(-ip-1)x}}{-ip-1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{ip-1}$$
$$= \frac{-1-ip}{1+p^2}$$

2.

$$\left|\frac{-1-ip}{1+p^2}\right| = \frac{\sqrt{1+p^2}}{1+p^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{|p|}$$

Donc $\left|\hat{f}(p)\right|$ diverge en $+\infty$.

$$\left|\hat{f}(p)\right|^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{p^2}$$

Donc $\left|\hat{f}(p)\right|^2$ converge en $+\infty$.

3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f^2(x)| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(p)\right|^2 dp$$
$$\left|\hat{f}(p)\right|^2 = \frac{1}{1+p^2}$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(p)\right|^2 dp = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f^2(x)| dx = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = 2\pi \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{+\infty} = \pi$$