Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2019 - 2020

Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°1

PARTIE COMMUNE

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.

Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.

***Durée :** 1h30. Les calculatrices ne sont **pas autorisées**. Ce sujet comprend **deux pages**.*

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. Formuler les propositions suivantes avec des quantificateurs et des connecteurs logiques :

1. « f est constante. »
2. « f n'est pas croissante. »
3. « f est injective. »
4. « f n'est pas surjective. »

Exercice 2 :

On définit la fonction $f : x \mapsto x^{-\ln(x)}$.

1. Pour $x > 0$ et $y \in \mathbf{R}$, rappeler la définition de x^y.
2. Quel est le domaine de définition maximal pour f ?
3. Donner les limites de f aux bornes de ce domaine de définition.
4. Calculer la dérivée de f.
5. Donner le tableau de variation de f.
6. On définit la fonction
$$g : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \to &]0, 1] \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$
Montrer que g est bijective.

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Exprimer les sommes suivantes en fonction de n :

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$.
2. $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$. *Indication : on pourra l'exprimer comme une somme télescopique.*
3. $S_3 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (i+j)^2$.

On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 4 :

1. Montrer que pour $x \in \mathbf{R} \backslash \{-3, -1/2, 1\}$,
$$\frac{1}{x^2+2x-3} - \frac{3}{2x^2+7x+3} = \frac{4-x}{(x-1)(x+3)(2x+1)}.$$
2. Déterminer l'ensemble des réels x tels que
$$\frac{1}{x^2+2x-3} \geq \frac{3}{2x^2+7x+3}.$$

Exercice 5 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 3$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$u_{n+1} = 2u_n - 1.$$
Donner l'expression du terme général u_n pour $n \in \mathbf{N}$.

On pourra commencer par calculer les premiers termes de la suite, puis formuler une conjecture sur l'expression de u_n, et montrer cette conjecture par récurrence.