Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°1
Partie CUPGE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra pour- suivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.
Durée : *1h30. Les calculatrices ne sont* **pas autorisées.**

Exercice 1 : On cherche à étudier la fonction réelle $f(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$.

1. Donner son domaine maximal de définition. La fonction f est-elle continue ?
2. Chercher le domaine maximal où f est dérivable. Calculer sa dérivée.
3. Calculer les limites en $\pm\infty$ et établir le tableau des variations de f. En déduire $\operatorname{im} f$.
4. Chercher les asymptotes éventuelles de f.
5. Tracer le graphe de f.

Exercice 2 : Soient P, Q et R trois propositions. Montrer que la proposition suivante est vraie :

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)).$$

Exercice 3 : On définit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $\sqrt{n} < u_n < \sqrt{n} + 1$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 4 : Exprimer les phrases suivantes en langage formel, puis donner leur négation (dans cette question, f désigne une fonction réelle).

1. f est une fonction constante.
2. L'équation $f(x) = 0$ a au plus deux solutions.
3. L'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions.
4. f est strictement croissante.

Exercice 5 : Montrer que pour tout réel x non nul, on a

$$\tanh x = \frac{2}{\tanh(2x)} - \frac{1}{\tanh x}.$$

En déduire la valeur de

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} 2^i \tanh(2^i x)$$

pour n entier naturel et x réel non nul donnés, puis calculer la limite de u_n quand $n \to \infty$.