Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°2
PARTIE CUPGE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra pour- suivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.
Durée : *1h30. Les calculatrices ne sont* **pas autorisées.**

Exercice 1 :

1. Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$
2. On pose $g(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Calculer g', g'', g''' et g''''. Quelle est leur parité ?
3. En étudiant les variations, montrer successivement que $g'''(x) \leq 0$, $g''(x) \leq 0$, $g'(x) \leq 0$ et $g(x) \leq 0$ pour $x \geq 0$. Que se passe-t-il pour $x \leq 0$?
4. Si $(x_n)_n$ est une suite avec $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, en déduire l'existence et la valeur de la limite $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(x_n)-1}{x_n^2}$.

Exercice 2 : Soit X un ensemble, et X_i une partie finie de X pour $i \in [\![1, n]\!]$, avec $n \geq 1$. On cherche à montrer que

$$\mathrm{Card}(\bigcup_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{I\subseteq[\![1,n]\!],\, I\neq\emptyset} (-1)^{1+\mathrm{Card}(I)}\mathrm{Card}(\bigcap_{i\in I} X_i).$$

Comme indiqué, la somme porte sur toutes les parties I non-vides de $[\![1, n]\!]$.

1. Expliciter et commenter les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
2. Montrer l'égalité pour n quelconque.

Exercice 3 :

1. (Question de cours) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective, et si $g \circ f$ est surjectve, alors g est surjective.
2. Soient f et h deux fonctions $X \to Y$ et $g : Y \to X$ tels que $f \circ g \circ h$ est injective et $h \circ g \circ f$ est surjective. Montrer que f, g et h sont bijectives.

Exercice 4 : Soit $f(x) = x\, e^{\frac{2x}{x^2-1}}$. On se propose d'étudier f.

1. Donner le domaine de définition maximal D de f.
2. Montrer que $f(1/x) = 1/f(x)$ et $f(x)\, f(-x) = -x^2$ pour $x \in D$.
3. Calculer les limites et les asymptotes de f en $\pm\infty$ (s'il y en a).
4. Étudier les limites à droite et à gauche de f aux points de $\mathbb{R} \setminus D$.
5. Calculer la dérivée de f où elle existe, et dresser le tableau de variations.
6. Dresser le graphe de f.

Exercice 5 : Exprimer les phrases suivantes en langage formel, puis donner leur négation. (Dans cette question, a, b et c dénotent des paramètres réels, et une racine d'un polynbôme réel $P(x)$ est un réel r tel que $P(r) = 0$.)

1. Le polynôme $ax^2 + bx + c$ a exactement deux racines réelles.
2. Toute racine de $x^2 + bx + c$ est une racine de $x + a$.