Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2019 - 2020
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°3
PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.

Durée : *1h30. Les calculatrices ne sont* ***pas autorisées****.*

Exercice 1 : *Questions de cours*

1. Montrer qu'une suite convergente est bornée.
2. On considère une suite (u_n) définie par une relation de récurrrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où f est une fonction réelle continue. Montrer que si (u_n) converge, alors elle converge vers un point fixe de f.
3. Montrer que pour tous nombres complexes z_1, z_2, on a : $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2Re(z_1\bar{z_2}) + |z_2|^2$.

Exercice 2 : Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z| = 1$ si et seulement si $\dfrac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur.

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = e^{u_n} - 2\,,\ \forall n \geq 1 \\ u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x - 2$. Etudier les variations de $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) - x$. En déduire que f admet deux points fixes a_1 et a_2 tels que $a_1 < 0 < a_2$.
2. Montrer par récurrence que si $u_0 \in \{a_1, a_2\}$, la suite (u_n) est stationnaire.
3. Montrer que l'intervalle $]a_1, a_2[$ est stable par f (*on rappelle qu'un intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$*).
4. Montrer que si $u_0 \in]a_1, a_2[$, alors (u_n) converge vers un réel que l'on précisera.
5. Etudier la convergence de (u_n) dans les cas $u_0 \in]-\infty, a_1[$ et $u_0 \in]a_2, +\infty[$.

Exercice 4 :

1. Soient A et B deux ensembles de cardinal fini et $f : A \longrightarrow B$ bijective. Montrer que $\#A = \#B$.

Soit E un ensemble non vide de cardinal fini $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On considère a un élément de E, et l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & X & \longmapsto & \begin{cases} X \cup \{a\} \text{ si } a \notin X \\ X \setminus \{a\} \text{ si } a \in X \end{cases} \end{array}$$

2. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Déterminer $\varphi \circ \varphi(X)$.
3. En déduire que φ est bijective et déterminer son inverse.

On note à présent $\mathbb{P}$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ constitué des parties de E ayant un cardinal pair et $\mathbb{I}$ celui constitué des parties de E de cardinal impair.

4. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{P}$, on a $\varphi(X) \in \mathbb{I}$.
5. Montrer que $\varphi(\mathbb{P}) = \mathbb{I}$.
6. En déduire que $\displaystyle\sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ 2q \leq n}} \binom{n}{2q} = \sum_{\substack{q \in \mathbb{N} \\ 2q+1 \leq n}} \binom{n}{2q+1}$.