Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2019–2020
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°4
Partie commune

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. On veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si on repère ce qui semble être une erreur d'énoncé, on le signalera sur sa copie et poursuivra la composition, en expliquant les raisons de cette initiative.

Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'on ne peut pas répondre à une question, il est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat que la question demandait de démontrer.

Durée : *1h30. Les calculatrices ne sont* ***pas autorisées****. Ce sujet comprend* ***deux pages****.*

Exercice 1. *(Questions de cours)*

1. On note $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$. Montrer que si $z \in \mathbf{U}$, alors $\overline{z} = \frac{1}{z}$.
2. Donner la division euclidienne de 2729 par 21.

Exercice 2.

1. À l'aide d'un taux d'accroissement, montrer que $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.
2. Établir la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, par

$$u_n = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$

Exercice 3. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to\infty}{\sim} n!.$$

Problème

Dans les trois exercices suivants, on se place dans le plan euclidien qu'on identifie à $\mathbf{C}$. Les trois exercices sont indépendants les uns des autres ; on pourra admettre les résultats de l'un pour résoudre l'autre.

Exercice 4. *(Questions préliminaires).* Soient a, b et z des complexes.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\theta \in \mathbf{R}$. Exprimer $\overline{r(a)} \times r(b)$ en fonction de a et b.
2. Soit t la translation de vecteur $-z$. Exprimer $\overline{t(a)} \times t(b)$ en fonction de a, b et z.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de déterminer l'aire d'un triangle en fonction des affixes de ses sommets. Plus précisément, si M, A et B sont trois points quelconques d'affixes respectives z, a et b, tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \in]0, \pi[$, on va montrer que

$$\text{Aire}(MAB) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\overline{(a-z)}(b-z) \right).$$

On le fait étape par étape.

1. Montrer que la formule est vraie lorsque M est l'origine O, A est situé sur le demi-axe des abscisses positives et B est quelconque. On rappelle que l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit d'une base et de la hauteur correspondante.
2. En déduire que la formule est vraie lorsque M est l'origine et A, B quelconques. *(Indication : la rotation de centre O et d'angle $-\operatorname{Arg}(a)$ préserve l'aire du triangle et permet de se ramener à la question* (a).*)*
3. En déduire que la formule est vraie avec M, A et B quelconques. (*Indication : utiliser une translation pour se ramener à la question* (b).*)*

Exercice 6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère maintenant un polygone régulier à $2n$ côtés, de sommets $A_0, A_1, \ldots, A_{2n-1}$ situés sur le cercle trigonométrique, avec A_0 d'affixe 1.

On considère un point M situé à l'intérieur du polygone. On hachure un triangle MA_kA_{k+1} sur deux, avec la convention que $A_{2n} = A_0$. Le but de cet exercice est de montrer que l'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du domaine non hachuré.

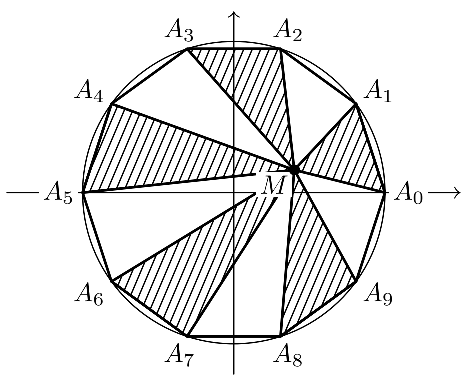

FIGURE 1 – Un exemple de découpage du décagone.

1. Exprimer en fonction de $\omega = e^{i\pi/n}$ les affixes des points $A_0, A_1, \ldots, A_{2n-1}$.
2. On pose $S = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k (\overline{\omega}^k - \overline{z})(\omega^{k+1} - z)$. Montrer que
$$S = \omega \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \right) - z \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \overline{\omega}^k \right) - \overline{z} \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \omega^{k+1} \right) + |z|^2 \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \right).$$
3. Montrer que chacune des quatre sommes qui apparaissent dans cette expression de S est nulle.
4. Conclure quant à l'égalité des aires.