Fondamentaux des mathématiques - DS n°4
Partie CUPGE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra pour- suivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qui lui était demandé de démontrer.
Durée : *1h30. Les calculatrices ne sont* **pas autorisées.**

Exercice 1 :

1. Établir une identité de Bézout pour $\mathrm{pgcd}(871, 377)$.
2. Donner une solution pour le système de congruences $x \equiv 5 \mod 871$ et $x \equiv 96 \mod 377$.
3. Donner toutes les solutions pour ce système.
4. Donner toutes les solutions pour le système de congruences $x \equiv 3 \mod 871$ et $x \equiv 80 \mod 377$.

Justifier les réponses.

Exercice 2 : Soit $n > 1$ et ω une racine primitive n-ème de l'unité.

1. Calculer le produit de toutes les racines n-èmes de l'unité.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ en fonction de $p \geq 0$.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n = 2n$.

Exercice 3 : Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + px^2 + q}$.
[Il faut distinguer certains cas en fonction de p et q.]

Exercice 4 : Pour $n \geq 1$ on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que H_n n'est jamais un entier pour $n > 1$.
[Indication : montrer par récurrence que H_n est le quotient d'un entier impair par un entier divisible par 2^k, où $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$.]

Exercice 5 : Pour $n > 0$ on pose $u_n = n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{1}{k}$ et $v_n = u_n + \sin\dfrac{1}{n}$. Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite.

Exercice 6 : Soient A et B deux parties non-vides et bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B = \{a+b : a \in A,\ b \in B\}$ et $AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$.

1. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
2. A-t-on toujours $\sup(AB) = \sup(A)\cdot\sup(B)$? Quelle hypothèse peut-on ajouter pour que cela soit vrai ?