Feuille d'exercices n° 11

POLYNÔMES

Exercice 1. Quelles sont les racines (dans $\mathbf{C}$, dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{Q}$) des polynômes suivants ?

a) $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$, b) $X^n - 1$, où n est un entier, c) $X^6 - 4$,

d) $X^4 - 13X^2 + 36$, e) $X^4 + 6X^2 + 25$.

Exercice 2. Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes qui le divisent dans l'anneau de polynômes précisé :

a) $X + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$, b) $X^2 - 1$ dans $\mathbf{R}[X]$,

c) $X^2 + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$, d) $X^2 + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 3.

1. Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que, pour tout $a \in \mathbf{C}$, on a $\overline{P(a)} = P(\overline{a})$.
2. Soit P, Q deux polynômes à coefficients complexes tels que $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $P = Q$.
3. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P(x) \in \mathbf{R}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $P \in \mathbf{R}[X]$.

Exercice 4. Développer $P = (X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1) \in \mathbf{R}[X]$. En déduire une preuve que 100011 n'est pas un nombre premier.

Exercice 5. Soit P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$, et soient a et b deux réels distincts. Soient λ (respectivement, μ) le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X - a$ (respectivement, par $X - b$). Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$. Commenter le cas $\lambda = \mu = 0$.

Exercice 6. Établir les identités, pour $n \in \mathbf{N}^*$

$$X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1),$$

$$X^{2n+1} + 1 = (X + 1)(X^{2n} - X^{2n-1} + X^{2n-2} - \cdots + (-1)^p X^p \cdots - X + 1).$$

En déduire les résultats suivants

1. Si le nombre de Mersenne $M_n = 2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
2. Si le nombre de Fermat $F_n = 2^n + 1$ est premier, alors n est soit nul, soit une puissance de 2.

Exercice 7. Pour quels entiers n le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$?

Exercice 8. Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles

1. $X^n + X^{n-1} + \cdots + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$,
2. $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$,
3. $X^4 + 4$ dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$, et enfin dans $\mathbf{Q}[X]$,
4. $X^4 - j$ dans $\mathbf{C}[X]$, où $j = \exp(2i\pi/3)$.
5. $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.
6. $X^5 - 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 9. Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P.
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbf{R}[X]$ et sur $\mathbf{C}[X]$.

Exercice 10. Soit $a \in \mathbf{R}$, $n \in N$, et le polynôme $P = (\cos a + X \sin a)^n \in \mathbf{R}[X]$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$.

Exercice 11. On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$. Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ et dans $\mathbf{R}[X]$ (on pourra utiliser judicieusement le fait que P est pair).

Exercice 12. Soit le polynôme $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + aX^2 + 4X + 1 \in \mathbf{R}[X]$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer a.
2. Montrer que -1 est racine double de P.
3. Montrer que j est racine multiple de P.
4. Factoriser P en facteurs irréductibles, d'abord dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 13. Soit θ un réel, et n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que le reste de la division euclidienne dans $\mathbf{C}[X]$ de $X^n \sin(\theta) - X \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$ par $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$ est nul. Qu'en est-il dans $\mathbf{R}[X]$?

Exercice 14.

1. Calculer le PGCD unitaire des polynômes $2X^4+X^2+X+1$ et de $X^6-X^5+X^4-2X^3+3X^2-3X+1$.
2. Montrer que les polynômes $X^4 - 1$ et $X^3 + 2X^2 - X - 1$ sont premiers entre eux, et établir un relation de Bézout entre eux.
3. Soient les polynômes complexes $A = X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ et $B = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$. Calculer leur PGCD unitaire. En déduire une relation de Bézout entre A et B. Déterminer tous les couples de polynômes (U, V) vérifiant cette identité.
4. Reprendre la question 3. avec $A = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ et $B = X^3 - X^2 + 2X - 1$.

Exercice 15. Soit n et m deux entiers. Calculer le PGCD unitaire des polynômes $X^n - 1$ et $X^m - 1$.

Exercice 16. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ, μ pour que X^2+1 divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 17. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

Exercice 18. Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, et soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes (pas nécessairement distincts). On pose $e_0 = 1$ et, pour k compris entre 1 et n :

$$e_k = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} z_{j_1} z_{j_2} \cdots z_{j_k}.$$

Voici quelques valeurs des e_k :

$$\begin{aligned}
e_0 &= 1, \\
e_1 &= z_1 + z_2 + \cdots + z_n, \\
e_2 &= (z_1z_2 + z_1z_3 + \cdots + z_1z_n) + (z_2z_3 + \cdots + z_2z_n) + \cdots + (z_{n-1}z_n), \\
&\vdots \\
e_{n-1} &= z_2 \cdots z_n + z_1z_3 \cdots z_n + \cdots + z_1 \cdots z_{n-1}, \\
e_n &= z_1 z_2 \cdots z_n.
\end{aligned}$$

1. Pour $n = 2$ (resp. $n = 3$), écrire explicitement e_1, e_2 (resp. e_1, e_2, e_3) et montrer que

   $$(X - z_1)(X - z_2) = X^2 - e_1X + e_2 \qquad \big(\text{resp. } (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) = X^3 - e_1X^2 + e_2X - e_3\big).$$

2. Pour n quelconque, montrer que l'on a :

   $$\prod_{j=1}^{n} (X - z_j) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e_k X^{n-k} .$$

3. Sachant que $2i$ et $3-i$ sont des racines de $X^3+(i+1)X^2-(8+4i)X-4+28i$, calculer la troisième racine complexe de ce polynôme.
4. Pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, déterminer sans calcul $\sum_{1 \leq j \leq n} e^{2\pi ij/n}$ et $\sum_{1 \leq j < k \leq n} e^{2\pi i(j+k)/n}$.

Exercice 19. Soit $P = X^4 + 12X - 5$. Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$, en sachant qu'il admet exactement deux racines réelles, et que leur somme vaut -2.

Exercice 20. Quels sont les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Exercice 21.

1. Factoriser le polynôme $X^2 - X + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$.
2. Soit n un entier naturel. Montrer que $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$.

Exercice 22. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ défini par $P = X^3 + 3X^2 + 2X + i$.

1. Déterminer les racines du polynôme dérivé P'.
2. Montrer que P n'admet aucune racine réelle.
3. Déduire des questions précédentes que P admet 3 racines distinctes dans $\mathbf{C}$, notées α, β et γ.
4. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

Exercice 23. On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5 les racines complexes du polynôme $P = X^5 - 29X^4 + 117X^3 - 11X^2 + 4X + 1$. Montrer que ces nombres sont différents de 0. Écrire le polynôme unitaire de degré 5 dont les racines sont $1/\alpha_1, 1/\alpha_2, 1/\alpha_3, 1/\alpha_4$ et $1/\alpha_5$.

Exercice 24. Déterminer le PGCD unitaire de $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et de $X^4 - 1$, considérés comme éléments de $\mathbf{Q}[X]$.

Exercice 25. Déterminer tous les polynômes de degré 3, divisibles par $X - 1$, et tels que les restes des divisions euclidiennes par $X - 2$, par $X - 3$ et par $X - 4$ soient égaux (mais certainement non nuls).

Exercice 26. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et considérons le polynôme à coefficients réels $P = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir a, b, c pour que P admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

Exercice 27. Factoriser $X^6 + X^3 + 1$ sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 28. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que les polynômes $1 + X + \ldots + \dfrac{X^n}{n!}$ et $1 + X + X^n$ n'ont que des racines simples dans $\mathbf{C}$.

Exercice 29. Montrer que le polynôme $P = X^{163} - 24X^{57} - 6$ possède au moins une racine réelle, mais ne possède pas de racine rationnelle.

Exercice 30. Soient a, b des réels, et $P = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$?

Exercice 31.

1. Soient p_1, p_2, p_3 et p_4 quatre entiers. Trouver deux entiers q_1 et q_2 tels que $(p_1^2+p_2^2)(p_3^2+p_4^2) = q_1^2+q_2^2$. *(Indication : manipuler les nombres complexes $p_1 + ip_2$ et $p_3 + ip_4$).*
2. Soient P_1, P_2, P_3 et P_4 quatre polynômes de $\mathbf{R}[X]$. En s'inspirant de la question précédente, trouver deux polynômes réels Q_1, Q_2 tels que $(P_1^2 + P_2^2)(P_3^2 + P_4^2) = Q_1^2 + Q_2^2$.
3. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
   (a) Pour tout réel x, on a $P(x) \geq 0$.
   (b) Il existe Q_1, Q_2 dans $\mathbf{R}[X]$ tels que $P = Q_1^2 + Q_2^2$.

Exercice 32. Déterminer tous les polynômes P vérifiant les relations suivantes :

a) $P(X^2+1) = P(X)$,

b) $P(2X+1) = P(X)$,

c) $(1-X)P'(X) - P(X) = X^n$, où $n \in \mathbf{N}$,

d) $P'(X)^2 = 4P(X)$,

e) $P(P(X)) = P(X)$.

Exercice 33.

1. Soient P_1, P_2 et Q trois polynômes. Montrer que $P_1 - P_2$ divise $Q(P_1) - Q(P_2)$.
2. Soit P un polynôme. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 34. **(Polynômes de Tchebychev)** On considère la suite de polynômes P_n définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X$, et pour $n \in \mathbf{N}$,

$$P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. Préciser P_2, P_3, P_4.
2. Déterminer le terme de plus haut degré de P_n.
3. Étudier la parité de P_n.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\theta \in \mathbf{R}$, on a $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Exercice 35. Soit P un polynôme réel scindé à racines simples.

1. Montrer que P' est aussi scindé à racines simples.
2. Montrer que si a et b sont respectivement la plus petite et la plus grande racine de P alors les racines de P' sont comprises entre a et b.

Exercice 36. Soit P et Q deux polynômes rationnels.

1. Montrer que $P|Q$ dans $\mathbf{Q}[X]$ si, et seulement si $P|Q$ dans $\mathbf{C}[X]$.
2. Montrer que P et Q ont le même PGCD considérés comme polynômes à coefficients dans $\mathbf{Q}$ ou dans $\mathbf{C}$.
3. Montrer que si P est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$ alors P et P' sont premiers entre eux (on dit alors que $\mathbf{Q}$ est un *corps parfait*).