Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2019–2020

Fondamentaux des mathématiques I

Feuille d'exercices n° 7a

Nombres complexes (première partie : sans la forme trigonométrique)

---

1. Calculs, partie réelle, partie imaginaire, conjugué, module

Exercice 1.

1. Calculer $i^n,\ n \in \mathbf{Z}$.
2. Calculer $(1+i)^8$.

Exercice 2.

1. Écrire le conjugué de $z = \dfrac{4-5i}{3+i}$, puis préciser sa partie réelle et sa partie imaginaire.
2. Soit z un complexe. Exprimer le conjugué de $w = \dfrac{2z^2-i}{5z+1}$ en fonction de $\bar{z}$.

Exercice 3.

1. Pour tout $z \in \mathbf{C}^\star$, exprimer $1/z$ sous forme algébrique.
2. Pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et tout $(c,d) \in \mathbf{R}^2$, déterminer l'ensemble des $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} ax - by = c, \\ bx + ay = d. \end{cases}$$

Exercice 4. On note $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Soit P une fonction polynômiale à coefficients réels, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel n et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.
   Soit z un nombre complexe. Montrer que si $P(z) = 0$, alors $P(\overline{z}) = 0$
2. Calculer $j\overline{j}$ et $j + \overline{j}$.
3. En déduire $j(-1-j)$, puis constater que j est solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$. Quelle est l'autre solution ?
4. À la lumière des questions précédentes, résoudre l'équation $z^3 = 1$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.
5. Sans calculer $1/j$ ni j^2, utiliser la question 4. pour justifier que $\overline{j} = \dfrac{1}{j} = j^2$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{iz-1}{z-i}$ soit réel.

Exercice 6. Résoudre $z^2 = \bar{z}$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

Exercice 7. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si z est réel.

Exercice 8. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel, et préciser son module.

Exercice 9. Soient u, v et w trois nombres complexes tels que $|u| = |v| = |w| = 1$. Établir la relation :

$$|uv + vw + wu| = |u + v + w|.$$

Exercice 10.
Soient u et v deux nombres complexes distincts tous deux de module 1. Montrer que pour tout complexe z, le nombre complexe $\left(\dfrac{z + uv\overline{z} - (u+v)}{u-v}\right)^2$ est un nombre réel négatif ou nul.

Exercice 11.

1. Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{C}$. Pour quelle valeur de $t \in \mathbf{C}$ le polynôme $P(X+t)$ est-il de la forme

$$X^3 + 3pX + q$$

   avec $p, q \in \mathbf{C}$?
2. Soient $p, q \in \mathbf{C}$. On s'intéresse à une méthode de calcul des racines du polynôme $R = X^3 + 3pX + q$, dite *méthode de Cardan*. On note α et β les deux racines, éventuellement égales, du polynôme $X^2 + qX - p^3$ et $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les trois racines cubiques de α.
   (a) Exprimer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ en fonction de p et q.
   (b) Démontrer que $\gamma_k - \frac{p}{\gamma_k}$ est une racine de R pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$.
3. On pose : $P = X^3 + 3X^2 + 6X + 2$.
   (a) Appliquer à P le procédé de la question 1.
   (b) Déterminer les racines du polynôme R déduit de P, puis celles de P, en exploitant la méthode de Cardan de la question 2.

2. Autour des racines carrées

Exercice 12. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $\Delta_1 = 49$ b) $\Delta_2 = -25$ c) $\Delta_3 = 50i$
d) $\Delta_4 = 3 + 4i$ e) $\Delta_5 = 8 - 6i$

Exercice 13. Résoudre les équations du second degré suivantes :

a) $z^2 + 2z + 10 = 0$ b) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ c) $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0.$

Exercice 14. Résoudre l'équation suivante : $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$.

Exercice 15. On considère l'équation en $z \in \mathbf{C}$ suivante : $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i = 0$.

1. Déterminer une racine réelle z_0 de cette équation.
2. Pour $z \in \mathbf{C}$, factoriser $z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i$ par $(z - z_0)$.
3. Résoudre l'équation.