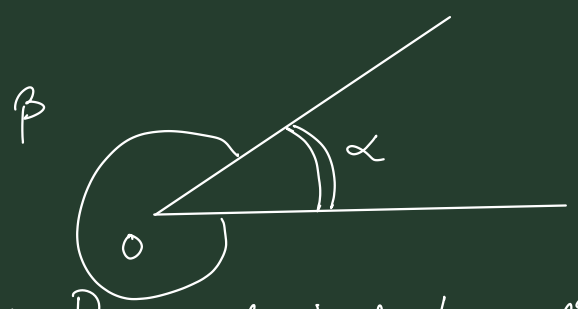
# Chapitre 1 : Fonctions trigonométriques

## 1. Rappels : angles et triangles rectangles

**Déf** : Un angle est une portion de plan délimitée par deux demi-droites concourantes. Les demi-droites sont appelées les côtés de l'angle, et leur origine est le sommet.

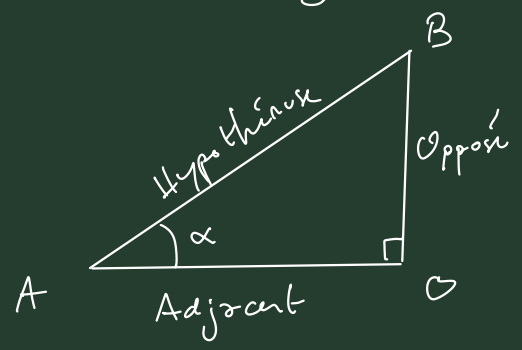



**Rem** : * Deux demi-droites définissent deux angles

* Les angles sont mesurés en degrés ou en radians
  un angle plat mesure $180°$ ou $\pi$ radians

* Mesure en degrés $(\alpha) = \frac{180}{\pi} \times$ Mesure en radians $(\alpha)$

**Déf**




$\cos(\alpha) = \frac{OA}{AB}$

$\sin(\alpha) = \frac{OB}{AB}$

$\tan(\alpha) = \frac{OB}{OA}$

Mnémotechnique

CAH

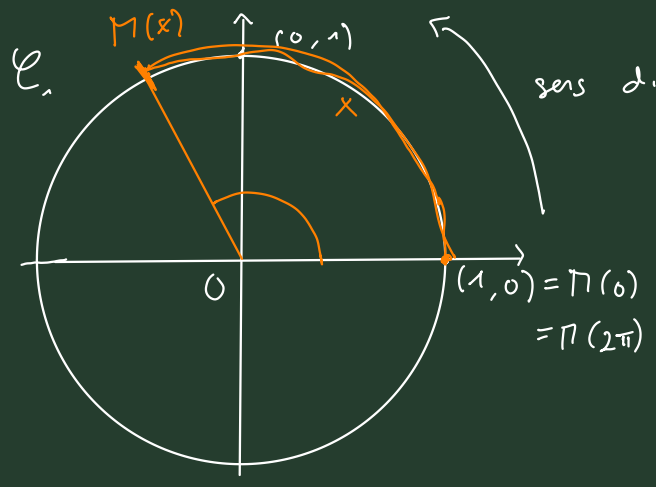
SOH

TOA

## 2. Le cercle trigonométrique

**Déf** : Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, muni d'un sens de parcours, appelé le sens direct (ou sens trigonométrique)

$$\mathcal{C}_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1 \}$$

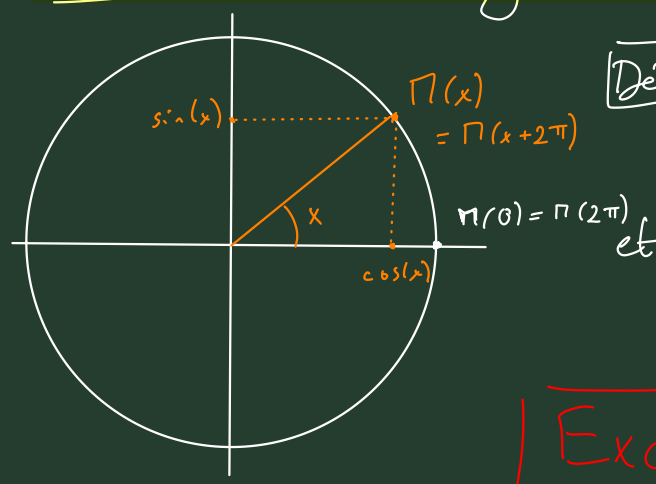



À chaque $x \geq 0$ correspond un point $M(x)$ sur le cercle : imaginons qu'on enroule une ficelle de longueur $x$ autour de $\mathcal{C}_1$, attachée à un bout à $(1,0)$.

Pour $x < 0$, c'est la même chose, mais dans le sens indirect.

$\boxed{\text{Déf}}$ : $x$ est une mesure en radians de l'angle délimité par $OM(0)$ et $OM(x)$

## 3. Les fonctions trigonométriques




$\boxed{\text{Déf}}$ : $\cos(x)$ est l'abscisse de $M(x)$

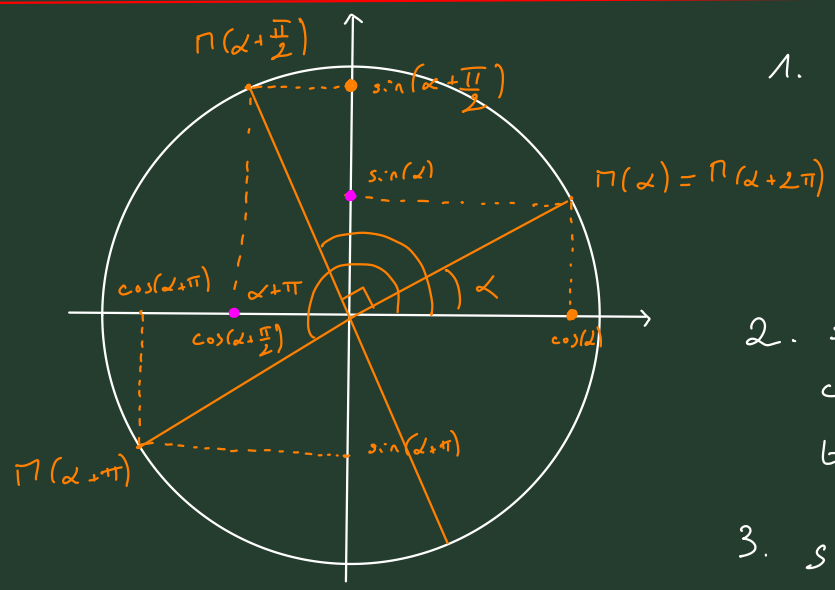
$\sin(x)$ est l'ordonnée de $M(x)$

et lorsque $\cos(x) \neq 0$,

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

$\boxed{\text{Exo 1}}$ 1, 2, 3

---




1. $\sin(\alpha+2\pi) = \sin(\alpha)$

$\cos(\alpha+2\pi) = \cos(\alpha)$

$$\tan(\alpha+2\pi) = \frac{\sin(\alpha+2\pi)}{\cos(\alpha+2\pi)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$$

2. $\sin(\alpha+\pi) = -\sin(\alpha)$

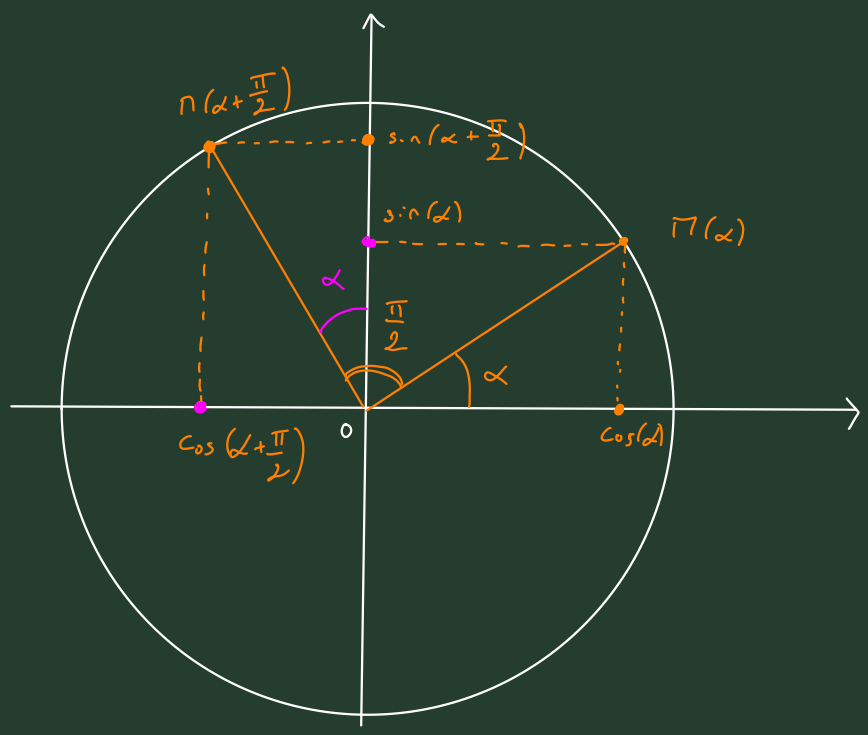
$\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$

$$\tan(\alpha+\pi) = \frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)} = \frac{-\sin(\alpha)}{-\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$$

3. $\sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \cos(\alpha)$

$\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -\sin(\alpha)$

$$\tan(\alpha+\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})} = \frac{\cos(\alpha)}{-\sin(\alpha)} = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$$




$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$$

---

Quelques valeurs

| $x$ | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| cos | $1$ | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | $0$ |
| sin | $0$ | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | $1$ |
| tan | $0$ | $1/\sqrt{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | non définie |

<u>Propriétés</u> :

1. cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$
   tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \underbrace{\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}_{\text{ensemble des points où cos s'annule}}$

   entiers relatifs

   $= \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \dots\right\}$

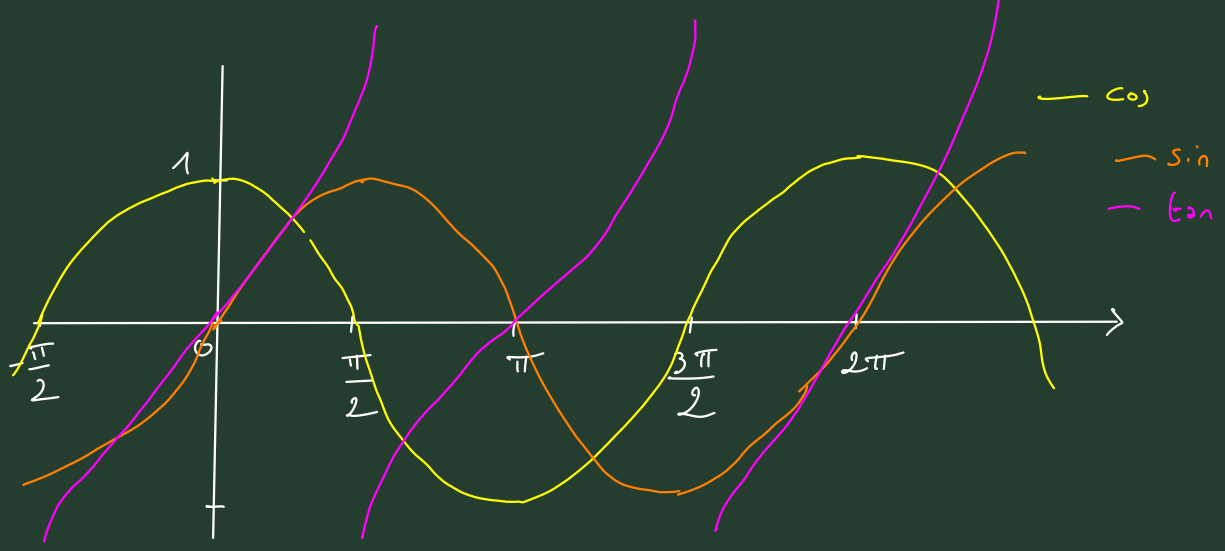
2. cos est paire $(\cos(-x) = \cos(x))$
   sin est impaire $(\sin(-x) = -\sin(x))$
   tan est impaire $(\tan(-x) = -\tan(x))$

3. cos et sin sont $2\pi$-périodiques $(\underline{\cos(x+2\pi) = \cos(x)})$
   tan est $\pi$-périodique $(\underline{\tan(x+\pi) = \tan(x)})$

4. cos, sin et tan sont continues et dérivables sur leur ensemble de définition, et

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
$$\sin'(x) = \cos(x)$$

5.




**Prop** : 1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

2. $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

3. $\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$

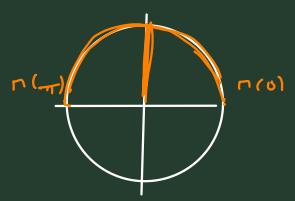
**Dém** : 1. est une conséquence du théorème de Pythagore. $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont les coordonnées de $M(x)$ qui est sur le cercle de rayon 1 $\mathcal{C}_1$, et donc $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

2. et 3. seront démontrés dans le chapitre 2. $\square$

---

**Ex 2** **Ex 3** **Ex 4**

**Ex 2** : 1. $x \in [0;\pi]$, $\cos(x) = \frac{1}{3}$




Comme $x \in [0;\pi]$, $\sin(x) \geqslant 0$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc $\sin^2(x) = 1 - \frac{1}{9}$

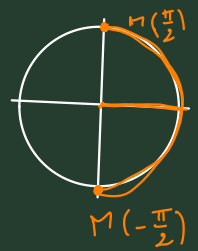
$= \frac{8}{9}$

et donc $\sin(x) = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2. $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\sin(x) = -\frac{1}{4}$

$|x| \leqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $-x \leqslant \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $x \geqslant -\frac{\pi}{2}$



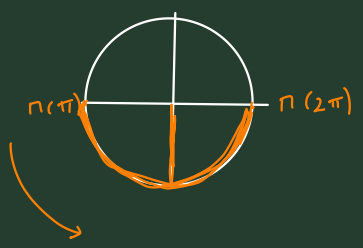

$|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, donc $\cos(x) \geqslant 0$.

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, donc $\cos^2(x) = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2$

$= \frac{15}{16}$

donc finalement, $\cos(x) = +\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

3. $x \in [\pi ; 2\pi]$, donc $\sin(x) \leq 0$ $\qquad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$




$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \sin^2(x) = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$

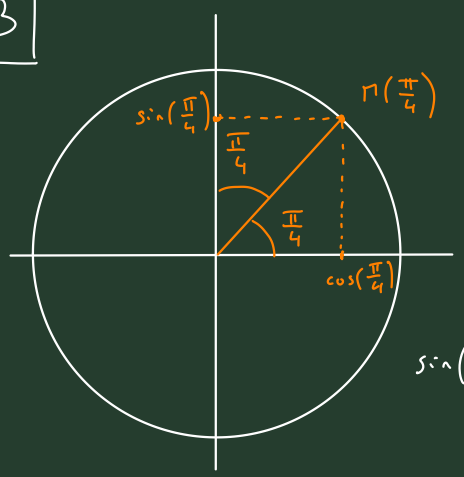
et donc finalement, $\sin(x) = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

4. $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) = \sqrt{3}$ :

$\sqrt{3} > 1$, or $\forall y \in \mathbb{R}$, $|\sin(y)| \leq 1$, donc un tel $x$ n'existe pas.

---

**Ex 3**




$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Le dessin permet de le prouver, mais on peut aussi utiliser des identités trigonométriques :

$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \overset{\text{Ex 1}}{=} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \overset{\text{Prop}}{=} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Or, $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, donc $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

et donc $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

de plus, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$, et donc finalement, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\square$

---

**Ex 4**

$$\frac{1}{\cos^2(\theta)} = \frac{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2 + 1$$

$$= \tan^2(\theta) + 1 \qquad \square$$

---

**Ex 5** 1. $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) \overset{\text{prop.}}{=} \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha)$

$= \cos^2(\alpha) - (1 - \cos^2(\alpha))$

$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) \implies = 2\cos^2(\alpha) - 1$

Groupe 1 : jusqu'à Sara Kacem (A → K)

Exercice 5 ou l'exercice 1 (4, 5, 6, 7)

à rendre pour le 22/01/2021.