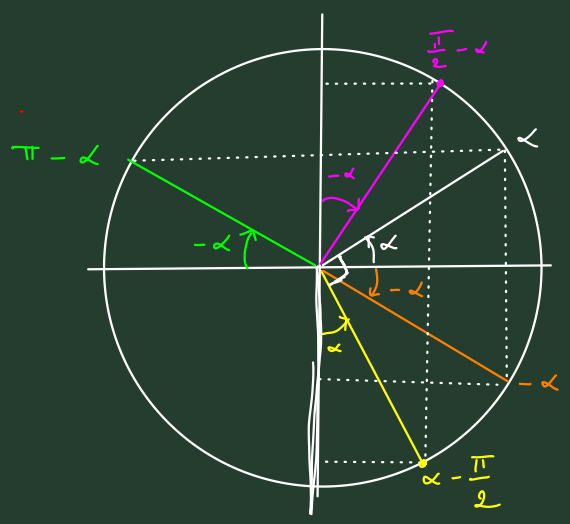
$\boxed{\text{Ex 1}}$ (Suite)



4. $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\alpha)$

$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha)$

(ou encore, en utilisant la question 3.

$\cos\left(\underbrace{\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}_{\beta}+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\underbrace{\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}_{\beta}$

$\Rightarrow \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\alpha)$)

$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{-1}{\tan(\alpha)}$

5. $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos(\alpha)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin(\alpha)$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$

(ou alors, en utilisant 4 et 5, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$)

7. $\sin(\pi-\alpha) = \sin(\alpha)$

$\cos(\pi-\alpha) = -\cos(\alpha)$

$\tan(\pi-\alpha) = -\tan(\alpha)$

(ou alors, $\sin(\pi-\alpha) \overset{2.}{=} -\sin(-\alpha) \overset{5.}{=} \sin(\alpha)$)

$\boxed{\text{Ex 5}}$: 1. $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ etc.

<u>Autre méthode</u> : * $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

donc $2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}$

$0 \leq \frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi}{2}$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$, et donc

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}$ ← réponse acceptable

... mais on peut simplifier : $2\sqrt{3}+4 = 1+2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2$
$= (1+\sqrt{3})^2$

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}+4}{8}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

$$* \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 \implies \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$$
$$= 1 - \left(\frac{\sqrt{3}+2}{4}\right)$$
$$= \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

À nouveau $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$ car $0 \leq \frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi}{2}$, et donc

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}.$$

2. $* \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$$= \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$$

$$* \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x)$$

$$* \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x)$$

$$* \cos(x - \pi) = \cos(x)\cos(\pi) + \sin(x)\cancel{\sin(\pi)}$$
$$= -\cos(x)$$

$$* \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x).$$

$\boxed{\text{Ex 6}}$ $* \; f(x) = \cos(2x) \quad : \quad D_f = \mathbb{R}.$

$\underline{f(x) = f(x+T)} \iff \cos(2x) = \cos(2(x+T))$ $\qquad \cos(2x) = \underbrace{\cos(2x+T)}_{\neq f(x+T)}$

$\iff \cos(2x) = \cos(2x + 2T)$

cos est 2π-périodique $\iff \cancel{2x} = \cancel{2x} + \cancel{2}T + \cancel{2}k\pi$, pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

$\cos(a) = \cos(b)$
$\iff a = b + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

$\iff T = -k\pi$

donc $\forall k \in \mathbb{Z}, \; f(x) = f(x - k\pi)$

et donc la période f est π.

$* \; g(x) = \cos(3x) + \sin(x). \qquad D_g = \mathbb{R}.$

$g(x) = g(x+T) \iff \cos(3x) + \sin(x) = \cos(3x + 3T) + \sin(x+T)$
$$= \cos(3x)\cos(3T) - \sin(3x)\sin(3T)$$
$$+ \sin(x)\cos(T) + \cos(x)\sin(T)$$

$$g(x) = g(x+T) \iff 1 \times \cos(3x) + \sin(x) = \cos(3T)\cos(3x) - \sin(3T)\sin(3x) + \cos(T)\sin(x) + \sin(T)\cos(x)$$

$$\iff \begin{cases} \cos(3T) = 1 \\ \sin(3T) = 0 \\ \cos(T) = 1 \\ \sin(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow T = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si $g(x) = g(x+T)$, alors $T = 2k\pi$.

Réciproquement, si $T = 2k\pi$, $g(x+T) = \cos(3x + 6k\pi) + \sin(x + 2k\pi)$
$= \cos(3x) + \sin(x) = g(x)$

$$g(x) = g(x+T) \iff T = 2k\pi.$$

Conclusion : g est 2π-périodique.

* $h(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$ $\qquad D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

h est bien définie en x si, et seulement si,

$$\cancel{\frac{\pi}{2}} + 3x \neq \cancel{\frac{\pi}{2}} + k\pi$$

$$\iff x \neq \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

et donc $D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{3}\right\}$.

On cherche la période de h : on sait $\tan$ est π-périodique, alors $h(x+T) = h(x) \iff \tan\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 3x + 3T\right)$

$$\iff \cancel{\frac{\pi}{2} + 3x} = \cancel{\frac{\pi}{2} + 3x} + 3T + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff T = -\frac{k\pi}{3}$$

donc $\forall k \in \mathbb{Z}$, $h(x) = h\left(x - \frac{k\pi}{3}\right)$, et donc h est $\frac{\pi}{3}$-périodique.

$\boxed{\text{Ex 7}}$

<u>Rappels</u> : $(f+g)' = f' + g'$ $\qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$(fg)' = f'g + fg'$ $\qquad (g(f(x)))' = f'(x)g'(f(x))$

* $f(x) = \underset{f}{x}\,\underset{g}{\cos(x)} - \sin(2x)$, $\qquad D_f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = \underset{f'}{\cos(x)}\,\underset{g}{} - \underset{f}{x}\,\underset{g'}{\sin(x)} - 2\cos(2x)$

* $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ $\qquad D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$$g'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

* $h(x) = \dfrac{\cos(3x) - \sin(2x)}{\cos(x)^2}$ $\qquad$ h est définie en $x \iff \cos(x) \neq 0$

$\iff x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

$(f^2)' = 2ff'$

$$h'(x) = \frac{(-3\sin(3x) - 2\cos(2x))(\cos^2(x)) - (\cos(3x) - \sin(2x))(2(-\sin(x))\cos(x))}{\cos^4(x)}$$

$$= \frac{-(3\sin(3x) + 2\cos(2x))\cos(x) + 2(\cos(3x) - \sin(2x))\sin(x)}{\cos^3(x)}$$

$\boxed{\text{Ex 8}}$: Rappel : si f est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$,

alors $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

et $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Pour vendredi 29 janvier : pour la seconde moitié de l'alphabet (L $\to$ Z inclus) :

$\boxed{\text{Ex 8}}$ et/ou $\boxed{\text{Ex 9}}$ à rendre sur moodle.

Suite du cours.

4. Réciproques des fonctions trigonométriques

$\boxed{\text{Déf}}$: Soient E et F des ensembles dans $\mathbb{R}$, et $f : E \to F$ une fonction. On dit que f est une bijection (ou bien qu'elle est bijective) entre E et F si tout élément $y \in F$ admet un unique antécédent $x \in E$ par f, c'est-à-dire que l'équation

$$f(x) = y, \quad \text{d'inconnue } x \in E$$

admet une unique solution. Cette solution est notée $f^{-1}(y) = x$,

et on définit ainsi $f^{-1} : F \longrightarrow E$, $y \longmapsto f^{-1}(y)$ la fonction réciproque de f.

<u>Exemples</u> : 1. $f : [0;+\infty[\longrightarrow [1;+\infty[$, $x \longmapsto x+1$ est bijective et

$$f^{-1} : [1;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[$$
$$y \longmapsto y-1$$

2. $g : [0;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[$, $x \longmapsto x+1$ n'est pas bijective, car 0 n'a pas d'antécédent par g.

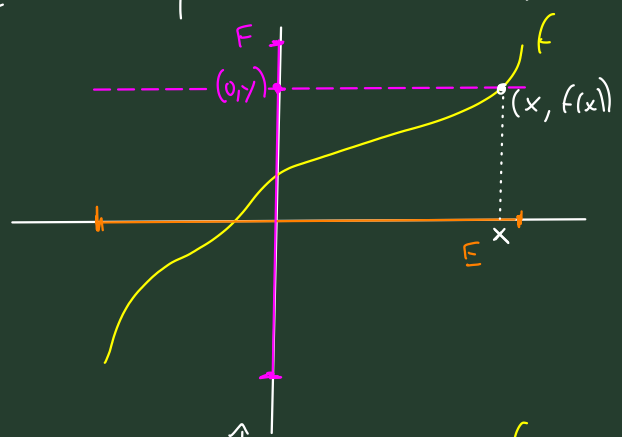
3. $h : [0;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[$, $x \longmapsto x^2$ est bijective, et

$$h^{-1} : [0;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[$$
$$y \longmapsto \sqrt{y}$$

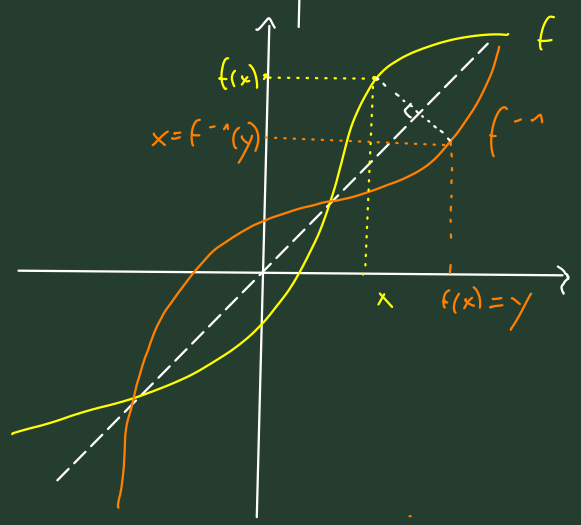
$\boxed{\text{Rem}}$: Si f est bijective, alors

* f^{-1} est bijective $(f^{-1})^{-1} = f$
* $\forall y \in F \quad f(f^{-1}(y)) = y$
  $\forall x \in E \quad f^{-1}(f(x)) = x$

$\boxed{\text{Rem}}$: On peut voir la bijectivité graphiquement



* f est bijective $\Longleftrightarrow \forall y \in F$, la droite passant $(0,y)$ et parallèle à l'axe des abscisses coupe le graphe de f en un unique point $(x, f(x))$



* Si f est bijective, le graphe de f^{-1} se déduit du graphe de f par réflexion par rapport à la droite $y=x$

$\boxed{\text{Prop}}$: Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ des <u>intervalles</u>, et soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction.

Si : 1. f est strictement monotone (croissante ou décroissante),

et 2. $f(I) = J$, c'est-à-dire que $\{f(x), x \in I\} = J$

alors f est bijective. De plus f^{-1} a la même monotonie que f.

$\boxed{\text{Rem}}$: C'est une condition suffisante, mais pas nécessaire.

$\boxed{\text{Dém}}$: Soit f qui vérifie 1. et 2.

On peut supposer, sans perte de généralité, que f est croissante. En effet, si f est décroissante, on peut raisonner avec $-f$ à la place.

* <u>f est bijective</u> : Soit $y \in J$. On va montrer que y admet un antécédent par f, et qu'il est unique.

D'après 2., il existe (au moins un) $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

Montrons qu'il est unique.

Soit $x' \in I$ tq $f(x') = y$. Si $x' > x$, alors $f(x') > f(x) \Rightarrow y > y$, c'est exclu

Idem pour $x' < x$. Par conséquent, $x' = x$.

Ainsi, $\forall y \in J$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I, et donc f est bijective.