Chapitre 2 : Nombres complexes

1. Rappels

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ensemble des entiers naturels

stable par addition, multiplication

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-\mathbb{N}\} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ ensemble des entiers relatifs

stable par soustraction

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$ ensemble des rationnels.

stable par division

$\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels : ils peuvent s'écrire comme la somme d'une partie entière et une partie décimale, potentiellement infinie.

stable par passage à la limite.

$\mathbb{C}$ = ensemble des nombres complexes

tout nombre complexe admet une racine carrée.

2. Définitions

2.1. Nombres complexes

Pour construire $\mathbb{C}$, on ajoute à $\mathbb{R}$ un nouvel élément, noté i, qui vérifie $i^2 = -1$, alors $\mathbb{C}$ est défini comme

$$\mathbb{C} = \{x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Si $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors on note $Re(z) = x$ sa <u>partie réelle</u>

et $Im(z) = y$ sa <u>partie imaginaire</u>

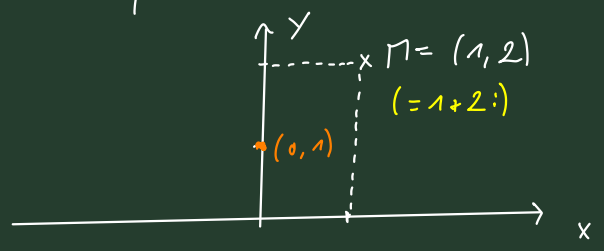
$\boxed{\text{Rem}}$: $z \in \mathbb{C}$,
- $Im(z)$ est un réel
- Si $Im(z) = 0$, alors $z \in \mathbb{R}$
- Si $Re(z) = 0$, z est un imaginaire pur.

$\boxed{\text{Def}}$ (Affixe) : Le nombre complexe $z = x + iy$ peut être représenté par le point M de coordonnées (x, y) (et vice versa)

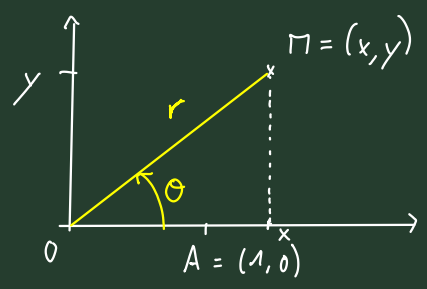
On dit que z est <u>l'affixe</u> du point M.

<u>Exemple</u> : $z = 1 + 2i$

$z = i$



2.2. <u>Représentation polaire</u>



Le point d'affixe $x+iy$ peut être repéré par ses coordonnées polaires, c'est-à-dire un couple (r, θ), où r est la distance OM, et θ est une mesure de l'angle entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ modulo 2π.

$\boxed{\text{Déf}}$: Le nombre $r \geq 0$ est appelé <u>le module</u> de z, et noté $r = |z|$ et θ est son <u>argument</u>, et est noté $\theta = \mathrm{Arg}(z)$

On peut retrouver un jeu de coordonnées à partir de l'autre :

$$x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta).$$

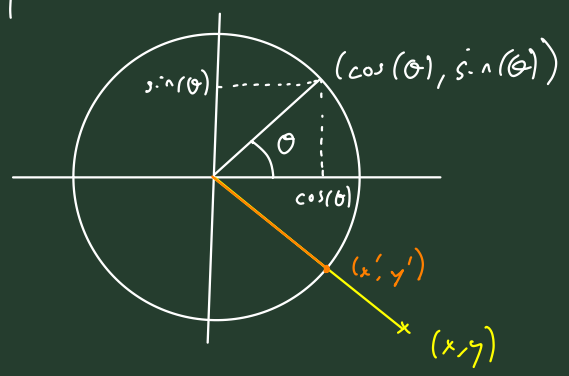
et $$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

⚠ $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, et donc $\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{Déf}}$: On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe définit par

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Le point d'affixe $e^{i\theta}$ est sur le cercle unité,



donc $e^{i\theta}$ est de module 1 et est d'argument θ.

Si $z \in \mathbb{C}$ est de module r et d'argument θ, alors on peut écrire $z = re^{i\theta}$

Cette écriture est la <u>forme polaire</u> de z (ou bien exponentielle), par opposition à la <u>forme algébrique</u> $z = x+iy$

3. Opérations

Dans toute cette section, on considère deux nombres complexes z et z', qu'on écrira $z = x+iy = re^{i\theta}$, $z' = x'+iy' = r'e^{i\theta'}$.

* Addition :

La somme de deux nombres complexes s'écrit simplement :

$$z + z' = (x+iy) + (x'+iy')$$
$$= x+x' + i(y+y')$$

Rem : L'addition ne s'écrit pas de manière simple pour des nombres sous forme polaire. En général, la forme algébrique est plus appropriée.

* Multiplication :

On développe $zz' = (x+iy)(x'+iy')$
$$= xx' + ixy' + iyx' + i^2yy'$$
$$= xx' - yy' + i(xy' + x'y)$$

Sous forme polaire, $zz' = (re^{i\theta})(r'e^{i\theta'})$
$$= rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

* Conjugaison

$\boxed{\text{Déf}}$: On définit le conjugué de z, et on le note $\bar{z}$, le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$

$\boxed{\text{Prop}}$: 1. Les points M d'affixe z et N d'affixe $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. En particulier, z et $\bar{z}$ ont même module, et leurs arguments sont opposés, alors $z = re^{i\theta}$, $\bar{z} = re^{-i\theta}$.

2. $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy)$
$$= x^2 - i^2y^2 + i\cancel{(xy-yx)}$$
$$= x^2 + y^2$$
$$= |z|^2 = r^2$$

3. $\bar{\bar{z}} = z$

4. $\bar{z} = z$ si, et seulement si, z est réel.

5. $\bar{z} = -z$ si, et seulement si, z est imaginaire pur.

6. $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, car

$$\begin{aligned}\overline{z+z'} &= \overline{(x+iy)+(x'+iy')} \\ &= \overline{x+x'+i(y+y')} \\ &= x+x'-i(y+y') \\ &= x-iy + x'-iy' \\ &= \bar{z} + \bar{z'}\end{aligned}$$

7. $\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z'}$

8. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

* <u>Inversion</u> :

Tout nombre complexe non nul admet un inverse, qui s'obtient facilement à partir de la forme polaire de z :

si $z = re^{i\theta}$ est non nul, alors $r \neq 0$ et z admet pour inverse

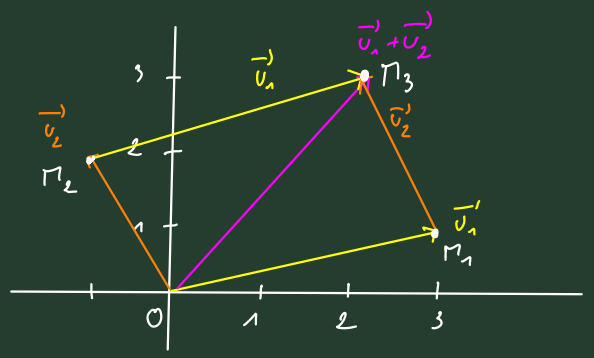
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

Pour inverser $z = x+iy$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\bar{z}$:

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Ex 1

1. $\vec{u_1} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{u_2} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{u_1}+\vec{u_2} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$



2. $M_1 = (3,1)$

$M_2 = (-1,2)$

M_3 tel que $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_3}$

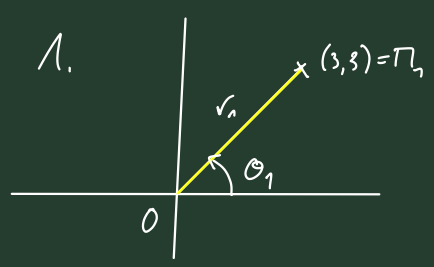
or, $\overrightarrow{OM_1} = \vec{u_1}$

$\overrightarrow{OM_2} = \vec{u_2}$

donc $\overrightarrow{OM_3} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, et $M_3 = (2,3)$

3. $z_1 = 3+i$
$z_2 = -1+2i$ sont les affixes de M_1 et M_2, et $z_3 = z_1+z_2 = 2+3i$ est l'affixe de M_3.

Ex 2 : 1.



$z_1 = 3+3i$

M_1 est sur la première bissectrice, donc on sait déjà que $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

On va le retrouver par le calcul.

On commence par calculer r_1 :

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

Maintenant, on cherche θ_1 tel que

$$3 + 3i = r_1 e^{i\theta_1} \iff e^{i\theta_1} = \frac{3+3i}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff \cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff \begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

Finalement, $\boxed{z_1 = 3\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}$

(en utilisant la formule du cours $\theta_1 = \arctan\left(\frac{3}{3}\right)$ car $3 > 0$

$\theta_1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$)

2. $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

Pour calculer z^{2000}, on passe par la forme polaire. En effet, si $z = re^{i\theta}$, alors

$$z^{2000} = (re^{i\theta})^{2000}$$
$$= r^{2000}(e^{i\theta})^{2000}$$
$$= r^{2000} e^{i\,2000\,\theta}$$

Pour vendredi 12/02 : $L \longrightarrow Z$

Exercice 2 (tout ce qui reste à faire)

et/ou

Exercice 3