Correction des exercices :

Ex 2 :

1. $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$, $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

On cherche θ_2 tel que $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$

$$-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)\right)$$

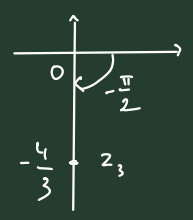
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta_2) = -\frac{1}{2} \\ \sin(\theta_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_2 = -\frac{2\pi}{3}$$

$-i = \underbrace{0}_{Re} + \underbrace{(-1)}_{Im}\cdot i$

et donc $z_2 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

$0 + (-1)\cdot i = \cos(\theta_3) + \sin(\theta_3) i$

* $z_3 = -\frac{4}{3} i$ $\quad |z_3| = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}$



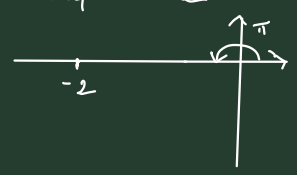
On cherche θ_3 tq $z_3 = \frac{4}{3} e^{i\theta_3} = \frac{4}{3}\left(\cos(\theta_3) + i\sin(\theta_3)\right)$

$\Leftrightarrow -i = \cos(\theta_3) + i\sin(\theta_3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta_3) = 0 \ Re \\ \sin(\theta_3) = -1 \ Im \end{cases} \Leftrightarrow \theta_3 = -\frac{\pi}{2}$$

et finalement, $z_3 = \frac{4}{3} e^{-i\frac{\pi}{2}}$

* $z_4 = -2$ $\quad |z_4| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$



on cherche θ tq

$z_4 = 2e^{i\theta} = 2\cos(\theta) + 2i\sin(\theta)$

$-2 = 2\cos(\theta)$, $0 = 2\sin(\theta)$

et de plus, $e^{i\pi} = -1$, donc $z_4 = 2e^{i\pi}$.

$\Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow z_4 = 2e^{i\pi}$

$z_4 = -2 = 2e^{i\pi}$

2. $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{2000}$. On met $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ sous sa forme trigonométrique

$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, on cherche θ tq

$$z = 1 \cdot e^{i\theta} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

donc $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$, et $z^{2000} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2000} = e^{i\frac{2000\pi}{3}}$.

Parenthèse : * $e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = \cos(0) + i\sin(0) = e^{i0} = 1$

* $e^{i(\theta + 2\pi)} = e^{i\theta}$ par 2π-périodicité du cos et sin.

$2000 = 666 \times 3 + 2$, donc

$$e^{i\frac{2000\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{666\times 3+2}{3}\right)\pi} = e^{i666\pi + i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Finalement $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2000} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{\text{Ex 3}}$:

$*$ $z_1 = \frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9+12i+18i-24}{3^2+4^2}$

$= \frac{-15+30i}{25}$

$= -\frac{3}{5} + \frac{6i}{5}$

Rappel :

$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy)$

$= x^2 - \cancel{ixy} + \cancel{iyx} + y^2$

$= x^2+y^2$

$= |z|^2$

$* \; z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$

$= \frac{1+2i+i^2}{4-4i+(-i)^2} + \frac{3+6i}{3-4i}$

$= \frac{2i}{3-4i} + \frac{3+6i}{3-4i}$

$z_2 = \frac{3+8i}{3-4i}$

$= \frac{(3+8i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$

$= \frac{9+12i+24i-32}{3^2+4^2}$

$= \frac{-23}{25} + \frac{36i}{25}$

$* \; z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} = \frac{(2+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{(2-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$= \frac{2+2i+5i-5}{1^2+1^2} + \frac{2-2i-5i-5}{1^2+1^2}$

$= \frac{-3+7i}{2} + \frac{-3-7i}{2}$

$= -3$

On aurait pu remarquer que $z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \overline{\left(\frac{2+5i}{1-i}\right)} = 2\mathrm{Re}\left(\frac{2+5i}{1-i}\right)$

car $z+\bar{z} = (x+iy)+(x-iy) = 2x$

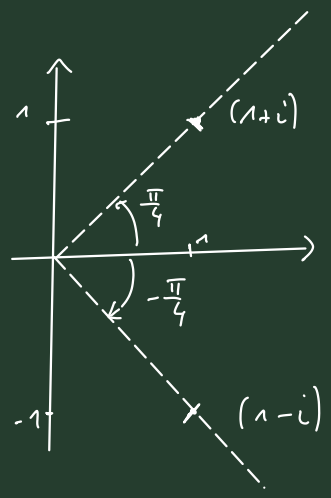
$\Rightarrow z_3 \in \mathbb{R}$: pratique pour vérifier qu'on n'a pas fait d'erreur de calcul.

$* \; z_4 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$: on écrit $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sous sa forme exponentielle

$$\left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot e^{i\theta}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

et donc $z_4 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i2\pi} = 1.$



* $z_5 = \dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

$$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

donc $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$

$$= \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et de la même manière $|1-i| = \sqrt{2}$

et donc $1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$$z_5 = \frac{\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^9}{\left(\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^7} = \left(\sqrt{2}\right)^2 \frac{e^{i\frac{9\pi}{4}}}{e^{-i\frac{7\pi}{4}}} = 2\, e^{i\frac{9\pi}{4}} e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2\, e^{i\frac{16\pi}{4}} = 2.$$

* Soit z de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$:

$$z = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 1 + i\sqrt{3}$$

$\boxed{\text{Ex 5}}$ Soit $z = 1 + i\sqrt{3}$

$\bar{z} = 1 - i\sqrt{3}$

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2, \qquad z = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad \left(\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right)$$

et $\bar{z} = 2\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$(1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 = \left(2\, e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5 + \left(2\, e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^5 \qquad = z^5 + \bar{z}^5$$
$$= 2^5\left(e^{i\frac{5\pi}{3}} + e^{-i\frac{5\pi}{3}}\right) \qquad = z^5 + \overline{(z^5)}$$
$$= 2^5\left(e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \qquad = 2\mathrm{Re}(z^5)$$
$$= 2^5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cancel{- i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cancel{+ i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)$$
$$= 2^5$$

$$(1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5 = 2^5\left(e^{i\frac{5\pi}{3}} - e^{-i\frac{5\pi}{3}}\right)$$
$$= 2^5\left(e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = 2^5\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= -2^5 i\left(2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\sqrt{3}\, 2^5 i.$$

$$z^5 - \bar{z}^5 = z^5 - \overline{(z^5)}$$
$$= \mathrm{Re}(z^5) + i\,\mathrm{Im}(z^5) - \left(\mathrm{Re}(z^5) - i\,\mathrm{Im}(z^5)\right)$$
$$= 2i\,\mathrm{Im}(z^5) \in i\mathbb{R}$$

Pause $\longrightarrow$ 14 h 33

<u>Addendum cours</u> : Trouver les racines carrées d'un nombre complexe.

* En notation exponentielle : on cherche $z \in \mathbb{C}$ tq
$$\boxed{z^2 = re^{i\theta}}$$
$$\Rightarrow z \in \{\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}, -\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}\}$$

* En notation algébrique : on cherche $z = x+iy$ tq
$$\boxed{z^2 = a + ib}$$

En développant, $x^2 - y^2 + 2ixy = a + ib$, donc $\boxed{x^2 - y^2 = a}$, $\boxed{2xy = b}$

De plus, $|z^2| = |z|^2 = |a+ib|$, donc $\boxed{x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}}$

On peut donc trouver x en résolvant $\left| \begin{array}{l} \boxed{x^2 - y^2 = a} \\ \boxed{x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}} \end{array} \right. \Rightarrow 2x^2 = a + \sqrt{a^2+b^2}$

Pour chaque valeur possible de x, on retrouve y par $\boxed{2xy = b}$.

$\boxed{\text{Ex 6}}$ * $z_1 = -5 - 12i$. On cherche x, y tels que $(x+iy)^2 = -5-12i$.

Alors $\left| \begin{array}{l} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = |z_1| = \sqrt{5^2+12^2} = 13 \\ 2xy = -12 \end{array} \right.$

donc $2x^2 = -5 + 13 = 8$, $x^2 = 4$, et donc $x = 2$ ou $x = -2$

Si $x = 2$, $y = \dfrac{-12}{2x} = -3$

et si $x = -2$, $y = 3$

Finalement, les racines de $-5-12i$ sont $2-3i$ et $-2+3i$

* $z_2 = 24 + 10i$, on cherche x, y tq $(x+iy)^2 = z_2$, donc

$\left| \begin{array}{l} x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(z_2) = 24 \\ x^2 + y^2 = |z_2| = \sqrt{24^2+10^2} = \sqrt{676} = 26 \\ 2xy = \mathrm{Im}(z_2) = 10 \end{array} \right.$

$20 \cdot 24 = 480$

$24^2 = 20 \cdot 24 + 4 \times 24$
$= 480 + 96 = 576$

$\Rightarrow 2x^2 = 24 + 26 = 50 \Rightarrow x = 5$ ou $x = -5$

$\Rightarrow$ si $x = 5$, $y = \frac{10}{2\cdot 5} = 1$, et si $x = -5$, $y = -1$

Finalement, les racines de z_2 sont $5+i$ et $-5-i$.

Vérification : $(5+i)^2 = 25 + 10i - 1 = 24 + 10i = z_2$, c'est OK.

* $z_3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, donc les racines de z_3 sont

$e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{4}}$, c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$.

$\boxed{\text{Ex 7}}$ Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, alors

P admet deux racines complexes,

$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, où $\sqrt{\Delta}$ est une racine complexe de Δ.

1. $z^2 - 2z + 5 = 0$, on calcule le discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 = -16 < 0$$

donc il n'existe aucune solution réelle.

2. Dans $\mathbb{C}$, $\Delta = -16$ admet des racines carrées : $4i$ et $-4i$.

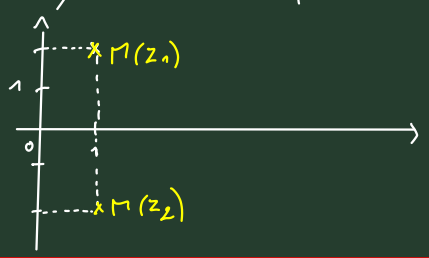
Alors l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$ admet comme solutions

$$\frac{2+4i}{2} = \underbrace{1+2i}_{z_1} \quad \text{et} \quad \frac{2-4i}{2} = \underbrace{1-2i}_{z_2}.$$

Vérification : $(1+2i)^2 - 2(1+2i) + 5 = 1 + \cancel{4i} - 4 - 2 - \cancel{4i} + 5$
$= 0$

$(1-2i)^2 - 2(1-2i) + 5 = 1 - 4i - 4 - 2 + 4i + 5$
$= 0$

Les solutions de $z^2 - 2z + 5$ sont conjuguées, c'est-à-dire qu'elles sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



$\boxed{\text{Ex 8}}$: 1. $z^2 + 1 = 0 \iff z^2 = -1$

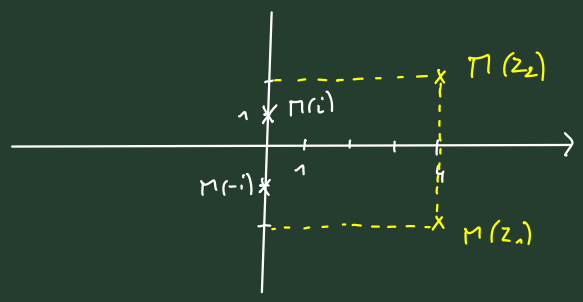
$\iff z = i$ ou $z = -i$

2. $-z^2 + 8z - 20 = 0$, $\Delta = 8^2 - 4\cdot 20 = 64 - 80 = -16 = (4i)^2$

donc les solutions de l'équation sont

$$\frac{-8+4i}{-2} = \underbrace{4-2i}_{z_1} \quad \text{et} \quad \frac{-8-4i}{-2} = \underbrace{4+2i}_{z_2}$$

À nouveau, les solutions sont conjuguées :



<u>Conclusion</u> : les racines d'un polynôme de degré 2 et à coefficients réels sont conjuguées.

Pour vendredi 19/02 : A → K :

exercice 6 (fin)

et/ou

exercice 9