# Chapitre 3 : Développement limités et formules de Taylor

## 1. Notation o ("petit o")

**Déf** : Soient $f, g$ deux fonctions, et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
On dit que $f$ est négligeable devant $g$ au voisinage de $x_0$

si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

Dans ce cas, on le note $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$.

**Ex** : * $f \underset{x \to x_0}{=} o(1)$ signifie que $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

* $x^6 \underset{x \to 0}{=} o(x^2)$ car $\dfrac{x^6}{x^2} = x^4 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

* $x^2 \underset{x \to +\infty}{=} o(x^6)$ car $\dfrac{x^2}{x^6} = \dfrac{1}{x^4} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

* $\ln x \underset{x \to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ car $\dfrac{\ln(x)}{1/x} = x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

**Prop** : De manière équivalente, on peut dire que $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o(g(x))$ s'il existe une fonction $\varepsilon$ (définie sur un voisinage de $x_0$) telle que $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$ et $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

## 2. Développements limités

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.

**Déf** (Développement limité en 0). Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $0$, et soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que $f$ admet un développement limité (DL) d'ordre $n$ en $0$ s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tq

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$

Le polynôme $P$ s'appelle la partie principale du DL de $f$ : il est une approximation polynômiale de $f$ au voisinage de $0$

$\boxed{\text{Ex}}$ : * $1 + x + x^2 = 1 + x + o(x)$

* $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ car $(1+x)(1-x) = 1 - x^2$,

donc $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{1+x}$

$\boxed{\text{Prop}}$ Si $f$ est dérivable en $0$, alors

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + o(x)$$

$\boxed{\text{Dém}}$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} f'(0) \quad \text{par déf}$$

donc $\dfrac{f(x) - f(0) - x f'(0)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ $\square$

$\boxed{\text{Prop}}$ : 1. Unicité : la partie principale d'un DL est unique.

Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f(x) \underset{x \to 0}{=} P(x) + o(x^n)$

$\underset{x \to 0}{=} Q(x) + o(x^n)$

alors $P = Q$.

2. Si $f$ admet un DL d'ordre $n$ en $0$, alors $f$ admet un DL d'ordre $p \leq n$ en $0$. La partie principale du DL d'ordre $p$ est obtenue en ne gardant que les monômes de degré $\leq p$ de la partie principale du DL d'ordre $n$.

$\boxed{\text{Déf}}$ (DL en $x_0$) : Soit $f$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que $f$ admet un DL d'ordre $n$ en $x_0$ si $f(x_0 + h)$ admet un DL d'ordre $n$ en $0$, càd s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tq

$$f(x_0 + h) \underset{h \to 0}{=} P(h) + o(h^n)$$

ou, en posant $x = x_0 + h$,

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} P(x - x_0) + o((x - x_0)^n).$$

<u>Ex</u> : DL de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $1$ d'ordre $1$ :

$$f(1+h) = \frac{1}{1+h} = \frac{1}{1-(-h)} = 1 + (-h) + o(h)$$

$$= 1 - h + o(h)$$

donc $\quad \dfrac{1}{x} \underset{x \to 1}{=} 1 - (x-1) + o(x-1)$

$\boxed{\text{Déf}}$ (DL en $\pm\infty$) Soit $f$ définie sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ (resp. $]-\infty; a[$). On dit que $f$ admet un DL d'ordre $n$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tq

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

<u>Ex</u> : $\dfrac{x}{x-1}$ en $+\infty$

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \underset{x \to +\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

## 3. Opérations sur les DL.

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} P(x) + o(x^n) = P(x) + \varepsilon_1(x)\, x^n$$
$$g(x) \underset{x \to 0}{=} Q(x) + o(x^n) = Q(x) + \varepsilon_2(x)\, x^n$$

$\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$$P(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$$
$$Q(x) = b_n x^n + \dots b_1 x + b_0$$

* Addition : $\quad f(x) + g(x) = \underbrace{P(x) + Q(x)}_{\in \mathbb{R}_n[X]} + \underbrace{(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0} x^n$

donc $\quad f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + o(x^n)$.

$\boxed{\text{Prop}}$ (Multiplication) : $f(x)g(x) = R(x) + o(x^n)$

où $R$ est le polynôme obtenu en multipliant $P$ et $Q$ et en ne gardant que les termes de degré $\leq n$.

$\boxed{\text{Ex}}$ : $$\frac{1+x+o(x)}{1-x} = \left(1+x+x\varepsilon_1(x)\right)\left(1+x+x\varepsilon_2(x)\right)$$
$$= 1+2x+x^2+(1+x)x\,\varepsilon_1(x)+(1+x)x\,\varepsilon_2(x)$$
$$= 1+2x+x\underbrace{\left(x+(1+x)\varepsilon_1(x)+(1+x)\varepsilon_2(x)\right)}_{=\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0}$$
$$= 1+2x+o(x)$$

En pratique, on écrira donc simplement
$$\frac{1+x+o(x)}{1-x} = \left(1+x+o(x)\right)\left(1+x+o(x)\right)$$
$$= 1+2x+o(x)$$

$\boxed{\text{Prop}}$ : (Composition) : Si $f(0)=0$, alors $g\circ f$ admet un DL d'ordre $n$ en $0$ et
$$g(f(x)) = R(x)+o(x^n)$$
où $R$ est le polynôme obtenu à partir de $Q\circ P$ et en ne gardant que les termes de degré $\leq n$.

$\boxed{\text{Ex}}$ : Si $f(x) = x+x^2+o(x^2) = x+x^2+x^2\varepsilon_1(x)$
$g(x) = 1-x^2+o(x^2) = 1-x^2+x^2\varepsilon_2(x)$
$$g(f(x)) = 1-f(x)^2+f(x)^2\varepsilon_2(f(x))$$
$$= 1-\left(x+x^2+x^2\varepsilon_1(x)\right)^2+\left(x+x^2+x^2\varepsilon_1(x)\right)^2\varepsilon_2(f(x))$$
$$= 1-\left(x^2+x^4+x^4\varepsilon_1^2(x)+2x^3+2x^3\varepsilon_1(x)+2x^4\varepsilon_1(x)\right)$$
$$+x^2\left(1+x+x\varepsilon_1(x)\right)^2\varepsilon_2(f(x))$$
$$= 1-x^2+x^2\underbrace{\left[-x^2-x^2\varepsilon_1^2(x)-2x^2-2x\varepsilon_1(x)-2x^2\varepsilon_1(x)+\left(1+x+x\varepsilon_1(x)\right)^2\varepsilon_2(f(x))\right]}_{=\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0}$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1-x^2+o(x^2).$$

En pratique, on calcule seulement
$$Q\circ P(x) = 1-P(x)^2 = 1-\left(x+x^2\right)^2$$
$$= 1-\left(x^2+2x^3+x^4\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1-x^2+o(x^2)$$

$\boxed{\text{Ex 1}}$ (1, 2, 3)

$\boxed{\text{Prop}}$ : Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dots + x^n + o(x^n)$$

$\boxed{\text{Dém}}$ : $(1-x)(1+x+\dots+x^n) = 1 - x^{n+1}$, donc

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) = \frac{x}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \qquad \square$$

Grâce à cette proposition, on peut calculer le DL de $\frac{1}{f}$, et, éventuellement, celui de $\frac{g}{f} = g \times \left(\frac{1}{f}\right)$ par simple produit.

<u>Exemple</u>

$$\frac{1}{1-(\underbrace{x+x^2}_{P(x)}+o(x^2))} = 1 + P(x) + P(x)^2 + o(x^2)$$

d'après la proposition sur les compositions

$$= 1 + (x+x^2) + (x+x^2)^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + x + x^2 + x^2 + o(x^2) = 1 + x + 2x^2 + o(x^2).$$

$\boxed{\text{Prop}}$ (Dérivation) : Si $f$ admet un DL d'ordre $n \geq 1$ en $0$, et si $f$ est dérivable, alors $f'$ admet un DL d'ordre $n-1$ en $0$ et $f' \underset{x\to 0}{=} P'(x) + o(x^{n-1})$

<u>Ex</u> : $f(x) = \frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + o(x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + o(x)$

$\boxed{\text{Prop}}$ (Intégration) : Soit $F$ une primitive de $f$. Si $f$ admet un DL d'ordre $n$ en $0$, alors $F$ admet un DL d'ordre $n+1$ en $0$,

et $F(x) \underset{x\to 0}{=} R(x) + o(x^{n+1})$

où $R$ est tel que $\begin{cases} R(0) = F(0) \\ R' = P \end{cases}$

<u>Ex</u> : $f(x) = \frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x) \Rightarrow F(x) = -\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$= x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

# 4. Formules de Taylor

On a vu que lorsqu'une fonction est dérivable en $0$,

son nombre dérivé en 0 donne le développement limité d'ordre 1 :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + o(x).$$

Les formules de Taylor généralisent ce résultat à un ordre quelconque.

$\boxed{\text{Thm}}$ (formule de Taylor-Young) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $n$ fois dérivable sur $I$, et soit $x_0 \in I$. Alors $f$ admet un DL d'ordre $n$ en $x_0$ donné par

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(h^n)$$

On écrit de manière plus compacte

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} h^k \frac{f^{(k)}}{k!}(x_0) + o(h^n)$$

ou encore

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} (x-x_0)^k \frac{f^{(k)}}{k!}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right).$$

Quelques exemples importants :

* $f(x) = e^x$, $f^{(k)}(x) = e^x$ $\forall k \in \mathbb{N}$, donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

* $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Alors $g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

$$g^{(2)}(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad \dots \quad g^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^k}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} k! + o(x^n)$$

$$= 1 + x + \dots + x^n + o(x^n),$$

ce qui est bien la formule qu'on a vu avant.

* $h(x) = \sin(x)$ $\qquad h^{(4k)} = \sin$

$h'(x) = \cos(x)$ $\qquad h^{(4k+1)} = \cos$

$h''(x) = -\sin(x)$ $\qquad h^{(4k+2)} = -\sin$

$\vdots$ $\qquad h^{(4k+3)} = -\cos$

donc, à l'ordre $2n+1$,

$$\sin(x) \underset{x \to 0}{=} 0 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} h^{(k)}(0) + o(x^{2n+1})$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

* De même,

$$\cos(x) \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$\boxed{\text{Exercice}}$ : En intégrant un DL connu, trouver le DL de $\ln(1+x)$ en $0$ à l'ordre $n$.