

### Ex 3

\*  $f_1(x) = e^x - (\cos(x) + \sin(x))$  à l'ordre 4 en 0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

donc  $f_1(x) = 1 - 1 + x(1-1) + x^2\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) + x^3\left(\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right)\right) + x^4\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{24}\right) + o(x^4)$

$$= x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0.$$

\*  $f_2(x) = \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0$

\*  $f_3(x) = (\cos(x))^2 = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2$

$$= 1 + \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4) \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0$$

\*  $f_4(x) = \frac{\sin(x)}{1+x} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)\right)$

$$= x - x^2 + x^3 - x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$= x - x^2 + \frac{5x^3}{6} - \frac{5x^4}{6} + o(x^4) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0$$

\*  $f_5(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}$

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + o(x^3) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

donc  $f_5(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0$$

\*  $f_6(x) = \frac{\cos(x)}{1+x-x^2}$  à l'ordre 4 en 0

$$\frac{1}{1 - (x^2 - x)} = 1 + (x^2 - x) + (x^2 - x)^2 + \underbrace{(x^2 - x)^3}_{+o(x^4)} + \underbrace{(x^2 - x)^4}_{+o(x^4)} + o(x^4)$$

$$= 1 + x^2 - x + x^4 - 2x^3 + x^2 + \underbrace{3x^4 - x^3}_{+x^4} + o(x^4)$$

$$= 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 5x^4 + o(x^4) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0$$

$$\text{donc } f_6(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)(1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 5x^4 + o(x^4))$$

$$\begin{aligned} &= 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + 5x^4 \\ &\quad - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - x^4 \\ &\quad + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \end{aligned}$$

$$= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{97}{24}x^4 + o(x^4) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0$$

$$\star f_7(x) = e^{s_n(x)}$$

$$s_n(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \frac{y^5}{120} + o(y^5) \quad \text{lorsque } y \rightarrow 0$$

par composition,

$$\begin{aligned} f_7(x) &= 1 + \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)}_{\text{en } x \rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2}_{\text{en } x \rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^3}_{\text{en } x \rightarrow 0} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{24} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^4}_{\text{en } x \rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{120} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^5}_{\text{en } x \rightarrow 0} + o(x^5). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}_{\text{en } x \rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right)}_{\text{en } x \rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{6} \left(x^3 - \frac{1}{2}x^5\right)}_{\text{en } x \rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{24} x^4}_{\text{en } x \rightarrow 0} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{120} x^5}_{\text{en } x \rightarrow 0} + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^3 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) \\ &= x^3 - 3x^2 \cdot \frac{x^3}{6} + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_7(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + x^4 \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) + x^5 \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right) \\ &\quad + o(x^5) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\star f_8(x) = \ln(\cos(x)) \quad \text{à l'ordre 4 en 0}$$

$$= \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \quad \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4)$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^4}{24}\right) + o(x^4) \quad = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0$$

Suite du cours :

[Prop]: (Dérivation): Si  $f$  admet un DL d'ordre  $n \geq 1$  en 0, et si  $f$  est dérivable, alors  $f'$  admet un DL d'ordre  $n-1$  en 0, et  $f(x) = P(x) + o(x^n)$ ,  $P \in \mathbb{R}_n[X]$   
 alors  $f'(x) = P'(x) + o(x^{n-1})$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

$$\underline{\text{Ex}}: f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2) \text{ lorsque } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + o(x) \text{ lorsque } x \rightarrow 0$$

[Prop]: (Intégration): Soit  $F$  une primitive de  $f$ . Si  $f$  admet un DL d'ordre  $n \geq 0$  en 0, alors  $F$  admet un DL d'ordre  $n+1$  en 0, et

$$F(x) = R(x) + o(x^{n+1}) \text{ lorsque } x \rightarrow 0$$

$$\text{où } R \in \mathbb{R}_{n+1}[X] \text{ est tel que } \begin{cases} R(0) = F(0) \\ R'(x) = P(x) \end{cases}$$

$$\underline{\text{Ex}}: f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x) \text{ lorsque } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow F(x) = -\ln(1-x) = F(0) + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ lorsque } x \rightarrow 0$$

#### 4. Formules de Taylor

On a vu que lorsqu'une fonction est dérivable en 0, son nombre dérivé en 0 donne le DL d'ordre 1 en 0:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x) \text{ lorsque } x \rightarrow 0$$

Les formules de Taylor généralisent ce résultat à un ordre quelconque.

[Thm]: (Formule de Taylor-Young) Soit  $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{I}$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{I}$ , et si  $x_0 \in \mathbb{I}$ , alors  $f$  admet un DL d'ordre  $n$  en  $x_0$  donné par

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(h^n) \text{ lorsque } h \rightarrow 0$$

On écrit, de manière plus compacte :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n h^k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + o(h^n)$$

ou encore, en posant  $x = x_0 + h$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n (x - x_0)^k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + o((x - x_0)^n).$$

Quelques exemples :

\*  $f(x) = e^x$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(k)}(x) = e^x$  donc, pour  $x_0 = 0$ ,

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^n x^k \cdot \frac{1}{k!} + o(x^n)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$* g(x) = \frac{1}{1-x}. \quad \text{Alors } g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$g''(x) = \frac{-2 \cdot (-1)}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$g^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$$

$$(\dots) \quad g^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}, \quad \text{donc } g^{(k)}(0) = k!$$

d'où, d'après le théorème de Taylor,

$$g(x) = 1 + \sum_{k=1}^n x^k \frac{k!}{k!} + o(x^n)$$

$$= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$* h(x) = \sin(x)$$

$$\text{Soit } k \in \mathbb{N}, \quad h^{(4k)}(x) = \sin(x)$$

$$h'(x) = \cos(x)$$

$$h^{(4k+1)}(x) = \cos(x)$$

$$h''(x) = -\sin(x)$$

$$h^{(4k+2)}(x) = -\sin(x)$$

$$h^{(4k+3)}(x) = -\cos(x)$$

donc, à l'ordre  $2n+1$ ,

$$\sin(x) = 0 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} h^{(k)}(0) + o(x^{2n+1})$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

lorsque  
 $x \rightarrow 0$

$$* \text{ De même, } \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

[Ex 2]

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ lorsque } x \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{donc } f(x) &= \frac{1 - \frac{x^2}{2} - 1 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} \\ &= -\frac{1}{2} + o(1) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{o(x^2)}{x^2} = \frac{x^2 \varepsilon(x)}{x^2} = \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0 \\ = o(1) \end{array} \right.$$

$$\text{De manière générale, } \frac{o(x^n)}{x^p} = o(x^{n-p})$$

$$\text{donc finalement } f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{e^x - 1 - x - x^2}{\ln(1+x) - x} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x - x^2}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x} \\ &= \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1 \end{aligned}$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + x^2}{e^x - 1 - x - 3x^2} = \frac{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) - 1 - \frac{1}{2}x + x^2}{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - x - 3x^2} = \frac{\frac{7}{8}x^2 + o(x^2)}{-\frac{5}{2}x^2 + o(x^2)}$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}-1\right)x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0$$

$$h(x) = -\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{8} \cdot \left( \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \right) = -\frac{7}{20} \left( \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} \right) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} -\frac{7}{20}$$

[Ex 4]

Pour trouver le DL de  $f$  en  $x_0$ , on écrit

$f(x_0 + h)$  et on fait un DL en 0 par rapport à  $h$ .

$$f_1(x) = \sqrt{x} \quad \text{en } x_0=2 \quad \Rightarrow \quad \text{l'ordre 2.}$$

$$\begin{aligned} f_1(2+h) &= \sqrt{2+h} = \sqrt{2} \sqrt{1+\frac{h}{2}} = \sqrt{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{h}{2} \right)^2 + o(h^2) \right) \\ &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} h - \frac{\sqrt{2}}{32} h^2 + o(h^2) \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On peut aussi écrire, en posant  $x = 2+h$ :

$$f_1(x) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} (x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32} (x-2)^2 + o((x-2)^2) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 2$$

$$* \quad f_2(x) = \frac{1}{\sin(x)} \quad \Rightarrow \quad \text{l'ordre 4 en } x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} f_2\left(\frac{\pi}{2}+h\right) &= \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)} = \frac{1}{\cos(h)} = \frac{1}{1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} + o(h^4)} = 1 + \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{24}\right) + \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{24}\right)^2 \\ &\quad + o(h^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2\left(\frac{\pi}{2}+h\right) &= 1 + \frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{24} + \frac{h^4}{4} + o(h^4) \\ &= 1 + \frac{h^2}{2} + \frac{5}{24} h^4 + o(h^4) \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$* \quad f_3(x) = x^{\ln(x)} = e^{\ln(x) \cdot \ln(x)} = e^{(\ln(x))^2} \quad \Rightarrow \quad \text{l'ordre 2 en } x_0 = 1.$$

Rappel :  $a^b \stackrel{\text{def}}{=} e^{b \ln(a)}$

$$\begin{aligned} f_3(1+h) &= e^{(\ln(1+h))^2} = e^{\left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)^2} = e^{h^2 + o(h^2)} \\ &= 1 + h^2 + \frac{1}{2} (h^2)^2 + o(h^2) \\ &= 1 + h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

$$* \quad f_4(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x+1} \quad \Rightarrow \quad \text{l'ordre 3 en } +\infty$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) \left( 1 + \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) + \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)^2 + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \\ &= \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) \left( 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

