$\boxed{\text{Ex 6}}$: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - x}{x-1}$

On effectue un DL de $f(x) = \dfrac{x^x - x}{x-1}$ en $x_0 = 1$

$$f(1+h) = \frac{(1+h)^{1+h} - (1+h)}{h}$$

$x = 1+h$

$$(1+h)^{1+h} = e^{(1+h)\ln(1+h)} = e^{(1+h)\left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)} \quad \text{lorsque } h \to 0$$

$$= e^{h - \frac{h^2}{2} + h^2 + o(h^2)} \quad \text{par produit}$$

$$= e^{h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)}$$

$$= 1 + \left(h + \frac{h^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(h + \frac{h^2}{2}\right)^2 + o(h^2) \quad \text{par composition}$$

$$= 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{1}{2}h^2 + o(h^2)$$

$$= 1 + h + h^2 + o(h^2) \quad \text{lorsque } h \to 0$$

⚠ $\underbrace{\dfrac{1}{1-x}}_{\to \infty} \neq 1 + x + o(x)$ lorsque $x \to 1$ $\quad \underbrace{}_{\to 2}$

$$f(1+h) = \frac{1 + h + h^2 + o(h^2) - 1 - h}{h} = \frac{h^2 + o(h^2)}{h} = h + o(h) \quad \text{lorsque } h \to 0$$

et donc $f(1+h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, d'où $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^x - x}{x-1} = 0$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\frac{1}{2x - \pi}}$$

On pose $g(x) = (\sin(x))^{\frac{1}{2x-\pi}}$, on cherche un DL de g en $\frac{\pi}{2}$

$$g\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + h\right)\right)^{\frac{1}{2\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - \pi}} = (\cos(h))^{\frac{1}{2h}}$$

$$= e^{\frac{1}{2h}\ln(\cos(h))}$$

$\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ lorsque $u \to 0$

$$= e^{\frac{1}{2h}\ln\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)} \quad \text{lorsque } h \to 0$$

$$= e^{\frac{1}{2h}\left(-\frac{h^2}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{h^2}{2}\right)^2 + o(h^2)\right)}$$

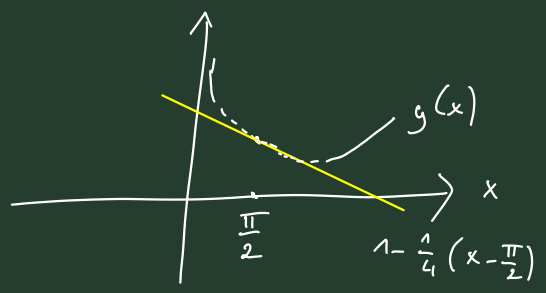
$$= e^{-\frac{1}{4}h + o(h)}$$

$e^u = 1 + u + o(u)$ lorsque $u \to 0$

$$= 1 - \frac{1}{4}h + o(h) \quad \text{lorsque } h \to 0$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} 1$$

Conclusion : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\sin(x)\right)^{\frac{1}{2x-\pi}} = 1$



Retours sur le DM :

Sur la rédaction :
* expliquer ce que vous faites
* insister / mettre en lumière les arguments utilisés

Ex : $|z| = 1 \Rightarrow z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \in \mathbb{R}$$

Il faut insister : $|z| = 1$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$

* Attention aux symboles
  " $\Leftrightarrow$ "
  " $=$ "

Ex :
$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned} \quad \text{donc} \quad e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \checkmark$$

$$\underbrace{\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta \end{aligned} \Longleftrightarrow e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta}_{\text{équivalence logique}} \times$$

Utilisez plutôt $\Rightarrow$!

Erreurs à éviter :

→ valeurs approximatives (sauf mention explicite du contraire)

Ex : $\arctan(\tan(1))$ $\quad \tan(1) \simeq 0{,}7$

$\Rightarrow \arctan(\tan(1)) = 1$

→ utilisez les radians, pas les degrés

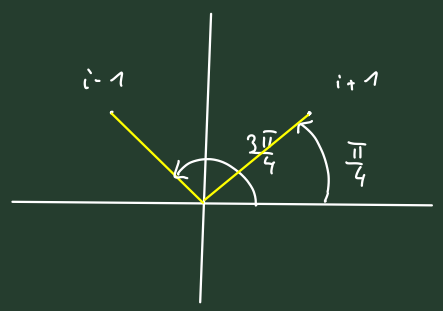
$\boxed{\text{Ex 1}}$: Déterminer les formes polaires de $i-1$ et $i+1$.
En déduire les formes polaire et algébrique de $\dfrac{(i-1)^5}{(i+1)^4}$

$z = \rho e^{i\theta}$ $\qquad$ $z = x+iy$

$|i-1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, donc $i-1 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$



De la même manière $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

Ainsi : $\dfrac{(i-1)^5}{(i+1)^4} = \dfrac{\sqrt{2}^5\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^5}{\sqrt{2}^4\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4} = \sqrt{2}\,\dfrac{e^{i\frac{15\pi}{4}}}{e^{i\frac{4\pi}{4}}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{4}}$

$= \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{11\pi}{4} - 2\pi\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

et donc $\dfrac{(i-1)^5}{(i+1)^4} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = i-1$.

$\boxed{\text{Ex 2}}$: Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 - (2+3i)z - 5 + i = 0$$

On calcule le discriminant : $\Delta = (2+3i)^2 - 4(-5+i)$

$= 4 + 12i \underbrace{-9}_{=(3i)^2} + 20 - 4i$

$= 15 + 8i$

On cherche une racine carrée de Δ : on cherche x et $y \in \mathbb{R}$ tels que $\underbrace{(x+iy)^2}_{= x^2 - y^2 + 2ixy} = \Delta \iff \begin{cases} x^2+y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\Delta) \\ 2xy = \mathrm{Im}(\Delta) \end{cases}$

$(x+iy)^2 = \Delta$
$\Rightarrow |(x+iy)^2| = |\Delta|$
$\Rightarrow |x+iy|^2 = |\Delta|$
$\Rightarrow x^2+y^2 = |\Delta|$

$|\Delta| = \sqrt{15^2+8^2} = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17$

donc $(x+iy)^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 17 & L1 \\ x^2-y^2 = 15 & L2 \\ 2xy = 8 \end{cases}$

$L1 + L2$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 = 32 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -4$$

$4+i$ est racine de Δ

$-4-i$ est racine de Δ

Si $x = 4$, alors $2xy = 8 \Rightarrow y = 1$.

Ainsi $4+i$ est une racine carrée de $15+8i$.

<u>Vérification</u> : $(4+i)^2 = 16 + 8i - 1 = 15 + 8i$.

Et donc finalement, les solutions de l'équation sont

$$z_0 = \frac{2+3i+4+i}{2} = 3+2i \qquad z_0 = \frac{-b + \text{"}\sqrt{\Delta}\text{"}}{2a}$$

$$\text{et} \quad z_1 = \frac{2+3i-(4+i)}{2} = -1+i \qquad z_1 = \frac{-b - \text{"}\sqrt{\Delta}\text{"}}{2a}$$

<u>Vérification</u> :

$$z_1^2 - (2+3i)z_1 - 5 + i = (-1+i)^2 - (2+3i)(-1+i) - 5 + i$$
$$= \cancel{1} - 2i - \cancel{1} + 2 - 2i + 3i + 3 - 5 + i$$
$$= 0$$

$\boxed{\text{Ex } 3}$: Calculer l'intégrale

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

indication : trouver des primitives pour

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = (\sqrt{u})'$$

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

donc

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\right]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{1-\frac{3}{4}} - \sqrt{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

À retenir : les fonctions trigonométriques réciproques sont utiles pour calculer des intégrales du type

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x)$$

$\boxed{\text{Ex 4}}$: 1. On considère $f(u) = \arctan(1+u)$. Donner le DL d'ordre 2 de f en 0. (Indication : utiliser la formule de Taylor, ou bien intégrer le DL de f')

2. Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{\pi}{4} - \arctan(x)}{\ln(x)}$

1. Formule de Taylor :

$$f(u) = f(0) + u f'(0) + \frac{u^2}{2} f''(0) + o(u^2) \quad \text{lorsque } u \to 0$$

$$f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(u) = (1+u)' \times \arctan'(1+u) = \frac{1}{1+(1+u)^2} = \frac{1}{u^2+2u+2}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$

$f = g \circ h$ $\qquad g(u) = \arctan(u)$, $h(u) = 1+u$

$$\Rightarrow f'(u) = h'(u) \cdot g'(h(u)) = \frac{1}{1+(h(u))^2}$$

Or $h'(u) = 1$, $g'(u) = \dfrac{1}{1+u^2}$

$$f''(u) = -\frac{2u+2}{(u^2+2u+2)^2}$$

$$\Rightarrow f''(0) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Donc $f(u) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}u^2 + o(u^2)$ lorsque $u \to 0$

[On aurait pu calculer le DL de $f'(u) = \dfrac{1}{2+2u+u^2}$ à l'ordre 1 en 0, puis intégrer]

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{\pi}{4} - \arctan(x)}{\ln(x)}$

On cherche un DL en 1 de $\dfrac{\frac{\pi}{4} - \arctan(x)}{\ln(x)}$

$$\frac{\frac{\pi}{4} - \arctan(1+u)}{\ln(1+u)} = \frac{\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}u^2 + o(u^2)\right)}{u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)} \quad \text{lorsque } u \to 0$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u^2 + o(u^2)}{u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}u + o(u)}{1 - \frac{u}{2} + o(u)} \xrightarrow[u \to 0]{} -\frac{1}{2}$$

Finalement, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{\pi}{4} - \arctan(x)}{\ln(x)} = -\dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{Ex 5}}$: Soit $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, définie pour $x > 0$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. Quelle est l'asymptote de f en $+\infty$? Quelle est sa position relative au graphe de f ?

1. $f(x) = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{x\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$

$= e^{1 + o(1)}$

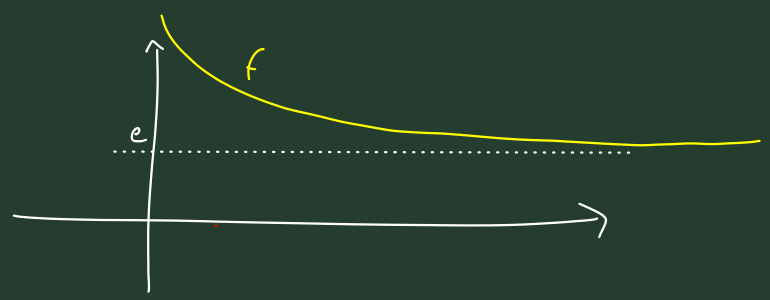
$\xrightarrow[x \to +\infty]{} e^1 = e$

$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$

$\Uparrow$

$\ln(1+u) = u + o(u)$ lorsque $u \longrightarrow 0$

2.



Pour connaître la position relative du graphe de f à son asymptote horizontale, on fait DL d'ordre supérieur, de telle sorte qu'on puisse écrire

$$f(x) = e + \frac{C}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$$

, et conclure grâce au signe de C

$\boxed{\text{Ex 6}}$: Soit $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x) + 2x} - \dfrac{1}{\ln(\cos(x) + \sin(x))}$

1. Montrer que f est bien définie sur $\left]-\frac{\pi}{6}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{6}\right[$
2. Calculer le DL de f à l'ordre 1 en 0
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = 0 \\ f(x) & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{6}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{6}\right[\end{cases}$

Comment choisir α pour que $\tilde{f}$ soit continue en 0 ?

Dérivable en 0 ?