Devoir maison : trigonométrie et nombres complexes

Les exercices peuvent être traités indépendamment les uns des autres. L'exercice 2 peut être vu comme une extension du cours : on utilise les nombres complexes pour trouver/retrouver des formules trigonométriques.
L'exercice 4 traite des intégrales de Wallis. Il est un peu plus difficile que le reste du sujet.

Exercice 1. Expliquer si les nombres suivants sont bien définis, et les calculer le cas échéant :

1. $\sin(\arcsin(\pi))$;
2. $\arcsin(\sin(\pi))$;
3. $\tan(\arctan(1))$;
4. $\arctan(\tan(1))$.

Exercice 2. Dans cet exercice, on se propose de retrouver quelques formules de trigonométries grâce aux nombres complexes. On rappelle que si $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

1. (Formule de Moivre) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$
2. (Formules d'Euler) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta, \quad \text{et} \quad \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta.$$
3. En déduire la *formule de linéarisation* suivante :
$$(\cos\theta)^3 = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos\theta.$$
4. En utilisant le fait que $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$, démontrer les formules du cours permettant d'exprimer $\sin(x+y)$ et $\cos(x+y)$ en fonction de $\cos x, \sin x, \cos y, \sin y$.

Exercice 3.

1. Soit z un complexe de module 1. Montrer que $z + 1/z \in \mathbb{R}$.
2. Réciproquement : peut-on affirmer que si $z+1/z \in \mathbb{R}$, alors z est de module 1 ? Le démontrer, ou bien apporter un contre-exemple.

Exercice 4. Dans cet exercice, on s'intéresse à l'intégrale de Wallis définie ainsi : si n est un entier naturel,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)dx.$$

1. Calculer I_0.
2. Montrer que $I_1 = \pi/4$ (on pourra par exemple exprimer $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$).
3. Grâce au changement de variable $y = \pi/2 - x$, montrer que $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(y)dy$.
4. Dans cette question, on va démontrer la formule suivante :

$$I_n = \left(\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

   (a) Grâce à une intégration par partie, montrer que

   $$I_n = (2n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(x) \cos^2(x)dx.$$

   Indication : utiliser les fonctions $f = \sin^{2n-1}$ *et* $g' = \sin$.

   (b) En déduire que

   $$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$

   (c) Vérifier que cette relation est cohérente avec les valeurs de I_0 et I_1 trouvées dans les questions précédentes.

   (d) Conclure : démontrer la formule (1).