Devoir maison : trigonométrie et nombres complexes

Corrigé

Les exercices peuvent être traités indépendamment les uns des autres. L'exercice 2 peut être vu comme une extension du cours : on utilise les nombres complexes pour trouver/retrouver des formules trigonométriques.
L'exercice 4 traite des intégrales de Wallis. Il est un peu plus difficile que le reste du sujet.

Exercice 1. Expliquer si les nombres suivants sont bien définis, et les calculer le cas échéant :

1. $\sin(\arcsin(\pi))$;
2. $\arcsin(\sin(\pi))$;
3. $\tan(\arctan(1))$;
4. $\arctan(\tan(1))$.

Solution. 1. arcsin est définie sur $[-1, 1]$, donc le nombre n'est pas défini.

2. $\arcsin(\sin(\pi)) = \arcsin(0) = 0$
3. arctan est la fonction réciproque de tan restreinte à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, et donc par définition pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\arctan(\tan(x)) = \tan(\arctan(x)) = x$, d'où $\tan(\arctan(1)) = 1$ et
4. $\arctan(\tan(1)) = 1$.

Exercice 2. Dans cet exercice, on se propose de retrouver quelques formules de trigonométries grâce aux nombres complexes. On rappelle que si $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

1. (Formule de Moivre) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$
2. (Formules d'Euler) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta, \quad \text{et} \quad \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta.$$
3. En déduire la *formule de linéarisation* suivante :
$$(\cos\theta)^3 = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos\theta.$$
4. En utilisant le fait que $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$, démontrer les formules du cours permettant d'exprimer $\sin(x+y)$ et $\cos(x+y)$ en fonction de $\cos x, \sin x, \cos y, \sin y$.

Solution. 1. On peut le démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, ou bien utiliser les propriétés de l'exponentielle : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

2. On obtient ces formules immédiatement en développant $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
3. On peut utiliser la formule d'Euler démontrée juste avant :

$$\begin{aligned}(\cos\theta)^3 &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{8}(e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta})\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2} + 3\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos\theta.\end{aligned}$$

4. Le calcul est sans surprise :

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}\\ &= (\cos x + i\sin y)(\cos y + i\sin y)\\ &= \cos x\cos y - \sin x\sin y + i(\cos x\sin y + \sin x\cos y),\end{aligned}$$

et on conclut par identification des parties réelles et imaginaires.

Exercice 3.

1. Soit z un complexe de module 1. Montrer que $z + 1/z \in \mathbb{R}$.
2. Réciproquement : peut-on affirmer que si $z+1/z \in \mathbb{R}$, alors z est de module 1 ? Le démontrer, ou bien apporter un contre-exemple.

Solution. 1. Si z est de module 1, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. On peut utiliser la formule d'Euler pour en conclure que $z + 1/z = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \in \mathbb{R}$.

2. La réciproque est fausse : par exemple, $2 + 1/2 \in \mathbb{R}$, mais 2 n'est pas de module 1. On peut aller plus loin et déterminer l'ensemble des complexes qui vérifient $z + 1/z \in \mathbb{R}$: si $z \in \mathbb{C}$ est non nul, il existe $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = \rho e^{i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned}z + 1/z \in \mathbb{R} &\iff \operatorname{Im}(z+1/z) = 0\\ &\iff \rho\sin\theta + \frac{1}{\rho}\sin(-\theta) = 0\\ &\iff \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\theta = 0\\ &\iff \rho = 1 \text{ ou } \theta \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}\\ &\iff |z| = 1 \text{ ou } z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.\end{aligned}$$

Exercice 4. Dans cet exercice, on s'intéresse à l'intégrale de Wallis définie ainsi : si n est un entier naturel,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)dx.$$

1. Calculer I_0.
2. Montrer que $I_1 = \pi/4$ (on pourra par exemple exprimer $\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$).
3. Grâce au changement de variable $y = \pi/2 - x$, montrer que $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(y)dy$.
4. Dans cette question, on va démontrer la formule suivante :

$$I_n = \left(\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

   (a) Grâce à une intégration par partie, montrer que

$$I_n = (2n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(x) \cos^2(x)dx.$$

   Indication : utiliser les fonctions $f = \sin^{2n-1}$ et $g' = \sin$.

   (b) En déduire que

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$

   (c) Vérifier que cette relation est cohérente avec les valeurs de I_0 et I_1 trouvées dans les questions précédentes.

   (d) Conclure : démontrer la formule (1).

Solution. 1. $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2$.

2. On utilise le fait que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, pour trouver

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 1 - 2\sin^2(x),\end{aligned}$$

   et donc $\sin^2(x) = (1 - \cos(2x))/2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos(2x))dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}[\sin(2x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

3. On pose le changement de variable $y = \pi/2 - x$. Alors l'intégrale devient :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)dx &= -\int_{\pi/2}^{0} \sin^{2n}(\pi/2 - y)dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(y)dy,\end{aligned}$$

   car $\sin(\pi/2 - y) = \cos(y)$.

4. (a) On effectue une intégration par partie en posant $f = \sin^{2n-1}$ et $g = -\cos$. Alors

$$\begin{aligned}I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)dx &= \int_0^{\pi/2} f(x)g'(x)dx \\ &= -[\sin^{2n-1}(x)\cos(x)]_0^{\pi/2} + (2n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(x)\cos x \cos x dx \\ &= (2n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(x)\cos^2(x)dx.\end{aligned}$$

(b) Dans l'équation précédente, un utilise la relation $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ pour trouver

$$\begin{aligned} I_n &= (2n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(x)\cos^2(x)dx \\ &= (2n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(x)dx - (2n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)dx \\ &= (2n-1)I_{n-1} - (2n-1)I_n, \end{aligned}$$

et donc, après avoir regroupé les termes, on trouver que $2nI_n = (2n-1)I_{n-1}$, ou en d'autres termes :

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$

(c) On avait trouvé $I_1 = \pi/4$ et $I_0 = \pi/2$. La relation de récurrence de la question (b) donne :

$$I_1 = \frac{2-1}{2} I_0 = \frac{1}{2} I_0,$$

ce qui est cohérent.

(d) On raisonne par récurrence. L'équation (1) est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ d'après les questions précédentes. Démontrons l'hérédité : on suppose que l'expression (1) est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors la relation de récurrence de la question (b) donne :

$$\begin{aligned} I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n &= \frac{2n+1}{2n+2}\left(\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}, \\ &= \left(\frac{2n+1}{2n+2} \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

et donc l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $n+1$.

On en conclut que la relation (1) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.