

Devoir sur table — 26 mars 2021

Les exercices peuvent être traités indépendamment les uns des autres. L'exercice 4 est un problème un peu plus long. Quelques formules de développements limités usuels sont rappelées dans le formulaire, à la fin du sujet.

Exercice 1. Établir le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin(x + \pi/2)$ en $x_0 = \pi/2$, à l'ordre 3.
2. $f_2(x) = x^x$ en $x_0 = 1$, à l'ordre 2.
3. $f_3(x) = \sin(\ln(1 + x))$ en $x_0 = 0$, à l'ordre 3.

Exercice 2. Déterminer la limite de

$$\frac{\sin(\ln(1 + x)) - \ln(1 + \sin x)}{x^3}$$

lorsque x tend vers 0. (On pourra utiliser le développement limité de l'exercice 1).

Exercice 3. On cherche les solutions complexes de l'équation

$$z^4 - (2 - 4i)z^2 = 3 - 4i. \quad (1)$$

1. Commencer par résoudre l'équation du second degré, d'inconnue $w \in \mathbb{C}$,

$$w^2 - (2 - 4i)w - 3 + 4i = 0. \quad (2)$$

2. En déduire les quatre solutions complexes de l'équation (1).

Exercice 4. Historiquement, les décimales de π étaient déterminées en approximant un cercle par un polygone régulier dont on peut calculer le périmètre. Cette méthode est restée d'actualité jusqu'à ce qu'Isaac Newton change la donne grâce à des développements en série (qui sont essentiellement des développements limités).

Le meilleur résultat connu à cette époque était celui de Ludolph Van Ceulen, qui a méticuleusement calculé, à la main, le périmètre d'un polygone régulier à 2^{62} côtés. Ce calcul, qui lui demanda 25 ans de travail (!), lui permit de déterminer 35 décimales de π . En 1666, alors confiné chez lui en raison de l'épidémie de la peste qui ravage l'Angleterre, Isaac Newton comprend comment utiliser les polynômes pour approximer des fonctions, ce qui lui permet de développer une nouvelle formule d'approximation de π , beaucoup plus facile à mettre en œuvre.

Dans cet exercice, nous revisitons la méthode de Newton grâce au développement limité de la fonction \arctan . Le type de formule de que nous allons démontrer reste utilisé aujourd'hui pour calculer π avec une très grande précision !

1. Démontrer que le développement limité de la fonction \arctan en 0 à l'ordre $2n + 1$ s'écrit

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0.$$

On pourra éventuellement commencer par établir le développement limité de \arctan' en 0.

L'idée est d'utiliser la formule $\arctan(1) = \pi/4$ et remplacer \arctan par son développement limité pour en déduire une approximation de π . On admet ici, même si ce n'est pas très dur à démontrer, qu'on obtient une bonne approximation, au sens où la différence entre $\arctan(x)$ et son développement limité à l'ordre n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

2. (Application) Grâce au DL d'arctan à l'ordre 1, démontrer que $\pi \simeq 4$.

Cette approximation, bien sûr, n'est pas très bonne. Le problème vient du fait qu'on utilise le développement limité d'arctan en 0 pour calculer arctan(1). On obtiendrait un meilleur résultat avec une formule faisant intervenir des termes de la forme arctan(x), avec x proche de 0 : c'est ce qu'on cherche à obtenir jusqu'à la fin du problème.

3. Le but de cette question est de montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|\arctan x + \arctan y| < \pi/2$ et $xy \neq 1$,

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right). \quad (3)$$

- (a) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a, b, a+b$ sont dans le domaine de définition de tan,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

- (b) Expliquer pourquoi $\tan(\arctan x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Inversement, est-ce vrai que $\arctan(\tan x) = x$ pour tout x dans le domaine de définition de tan? Le démontrer ou fournir un contre-exemple.

- (c) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xy \neq 1$. Conclure en posant $a = \arctan x$ et $b = \arctan y$.

4. (Formule d'Euler) Montrer que

$$\arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

5. (Formule de John Machin) En utilisant la formule (3), montrer que $2 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{5}{12}$, puis que $4 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{120}{119}$. En conclure que

$$\arctan 1 = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

6. (Application) Utiliser la formule d'Euler et le développement limité d'arctan à l'ordre 1 pour en déduire une approximation de π . Faire la même chose avec la formule de John Machin. Combien de décimales de π sont correctes pour chacune de ces approximations? (*Indication* : $4/239 \simeq 0,02$, $\pi \simeq 3,14$.)

À titre indicatif, on retrouve les 35 décimales de π de Van Ceulen avec la formule de Machin en faisant un DL d'ordre 21, ce qui n'est pas rien, mais qui se calcule en un temps considérablement plus court que 25 ans. Un ordinateur le fait instantanément!

—Fin du sujet—

Formulaire

Développements limités usuels en $x_0 = 0$, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n) \\ \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ \exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

lorsque x tend vers 0.