Rattrapage du DST

Les exercices peuvent être traités indépendamment les uns des autres. On n'hésitera pas à faire appel aux théorèmes du cours, notamment pour répondre aux questions de l'exercice 3.

Exercice 1. Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin(x + 3\pi/2)$ en $x_0 = -\pi/2$ à l'ordre 3.
2. $f_2(x) = \ln(1 + x)$ en $x_0 = 4$ à l'ordre 3.
3. $f_3(x) = \exp(\cos x)$ en $x_0 = 0$ à l'ordre 2. *Attention :* $\cos(0) \neq 0$.
4. $f_4(x) = \arctan(x)$ en $x_0 = 0$ à l'ordre $2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. *On pourra calculer le développement limité de* $\arctan'$ *et l'intégrer.*

Exercice 2. On étudie le polynôme $P(z) = z^3 - (1 + 8i)z^2 - (17 - 7i)z$.

1. Calculer les racines complexes de $\Delta = 5 - 12i$.
2. Trouver les trois solutions $z_1,\ z_2,\ z_3$ de $P(z) = 0$ en résolvant un polynôme de degré 2.
3. Placer les points d'affixe $z_1,\ z_2,\ z_3$ dans le plan (faire un dessin). Que peut-on dire du triangle ainsi formé ? Le démontrer par le calcul.
4. Cherchons maintenant les solutions de $0 = P'(z) = 3z^2 - 2(1 + 8i)z - (17 - 7i)$. Donner une expression exacte des deux solutions, puis une expression approchée à 10^{-2}. Sur le dessin du triangle de la question précédente, ajouter les deux solutions de l'équation $P'(z) = 0$. Que peut-on dire de la position de ces points par rapport au triangle ?

Exercice 3. Dans cet exercice, on étudie aux fonctions hyperboliques (cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique), définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
2. Démontrer que sinh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Comme sinh est une bijection, on peut donc définir sa fonction réciproque *argument sinus hyperbolique*, notée argsh.

3. Quel est l'ensemble de définition de argsh ? Démontrer que argsh est dérivable sur son ensemble de définition, et que sa dérivée est donnée par

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

On s'intéresse maintenant au comportement de la fonction argument sinus hyperbolique au voisinage de 0.

4. Que vaut argsh(0) ?
5. Déterminer le développement limité de $(1 + h)^{-1/2}$ en 0 à l'ordre 2.
6. En déduire le développement limité de argsh en 0 à l'ordre 5.
7. (Application) Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{argsh}(x) - \sin(x)}{x^5}.$$