Rattrapage du DST
Corrigé

Les exercices peuvent être traités indépendamment les uns des autres. On n'hésitera pas à faire appel aux théorèmes du cours, notamment pour répondre aux questions de l'exercice 3.

Exercice 1. Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin(x + 3\pi/2)$ en $x_0 = -\pi/2$ à l'ordre 3.
2. $f_2(x) = \ln(1 + x)$ en $x_0 = 4$ à l'ordre 3.
3. $f_3(x) = \exp(\cos x)$ en $x_0 = 0$ à l'ordre 2. *Attention :* $\cos(0) \neq 0$.
4. $f_4(x) = \arctan(x)$ en $x_0 = 0$ à l'ordre $2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. *On pourra calculer le développement limité de* $\arctan'$ *et l'intégrer.*

Solution. 1. On cherche le DL de $f_1(-\pi/2 + h) = \sin(\pi + h) = -\sin(h)$ en 0. On applique directement la formule :

$$f_1(-\pi/2 + h) = -h + \frac{h^3}{6} + o(h^3)$$

lorsque $h \to 0$.

2. On peut procéder de deux manières différentes : la première est d'écrire

$$f_2(4 + h) = \ln(5 + h) = \ln(5(1 + h/5)) = \ln(5) + \ln(1 + h/5)$$

et d'effectuer le DL de $\ln(1 + h/5)$ en 0. On peut aussi appliquer la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= \frac{1}{1+x}, \\ f_2''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} \\ f_2'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} f_2(4 + h) &= f_2(4) + hf_2'(4) + \frac{h^2}{2} f_2''(4) + \frac{h^3}{6} f_2'''(4) + o(h^3) \\ &= \ln(5) + \frac{h}{5} - \frac{h^2}{25} + \frac{2h^3}{125} + o(h^3). \end{aligned}$$

3. Comme $\cos(0) = 1$, on peut factoriser l'expression par $\exp 1 = e$ pour se ramener à un DL de l'exponentielle en 0 :

$$\begin{aligned} f_3(x) = \exp(\cos x) &= \exp\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= \exp 1 \exp(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)) \\ &= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

lorsque $x \to 0$.

4. La dérivée d'arctangente s'écrit :
$$f_4(x) = \arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}),$$
lorsque $x \to 0$, et donc, en intégrant, et en utilisant le fait que $\arctan 0 = 0$, on obtient
$$f_4(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$
lorsque $x \to 0$.

Exercice 2. On étudie le polynôme $P(z) = z^3 - (1+8i)z^2 - (17-7i)z$.

1. Calculer les racines complexes de $\Delta = 5 - 12i$.
2. Trouver les trois solutions $z_1,\ z_2,\ z_3$ de $P(z) = 0$ en résolvant un polynôme de degré 2.
3. Placer les points d'affixe $z_1,\ z_2,\ z_3$ dans le plan (faire un dessin). Que peut-on dire du triangle ainsi formé ? Le démontrer par le calcul.
4. Cherchons maintenant les solutions de $0 = P'(z) = 3z^2 - 2(1+8i)z - (17-7i)$. Donner une expression exacte des deux solutions, puis une expression approchée à 10^{-2}. Sur le dessin du triangle de la question précédente, ajouter les deux solutions de l'équation $P'(z) = 0$. Que peut-on dire de la position de ces points par rapport au triangle ?

Solution.
1. On cherche x, y réels tels que $(x+iy)^2 = 5 - 12i$. En identifiant les parties réelles et imaginaires, ainsi que le module, on peut dire que $x + iy$ est une racine de Δ si, et seulement si, le système suivant est vérifié :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13 \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\Delta) = 5 \\ \quad 2xy = \mathrm{Im}(\Delta) = -12 \end{cases}$$
En additionnant les deux premières équations, on trouve que $2x^2 = 18$, donc $x = 3$ ou $x = -3$. Le y correspondant à chacun de ces deux cas est donné par la troisième équation. On en conclut que les racines de Δ sont $3 - 2i$ et $-3 + 2i$.
2. $P(z) = 0$ ssi $z = 0$ ou $z^2 - z(1+8i)z - (17-7i) = 0$. On calcule le discriminant du polynôme du second degré : $(1+8i)^2 + 4(17-7i) = 1 + 16i - 54 + 68 - 28i = 5 - 12i = \Delta$. On a déjà calculé les racines de Δ, et donc le polynôme P admet trois racines, données par
$$z_1 = 0, \quad z_2 = \frac{1+8i+3-2i}{2} = 2+3i, \quad z_3 = \frac{1+8i-3+2i}{2} = -1+5i.$$
3. Soient M_1, M_2, M_3 les points d'affixe z_1, z_2, z_3. Le triangle $M_1M_2M_3$ est rectangle et isocèle en M_2 :
$$\begin{aligned} M_1M_2 &= |z_2 - z_1| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}, \\ M_1M_3 &= |z_3 - z_1| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}, \\ M_2M_3 &= |z_3 - z_2| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}, \end{aligned}$$
donc $(M_1M_3)^2 = (M_1M_2)^2 + (M_1M_3)^2$ et le théorème de Pythagore permet de conclure.
4. Le discriminant de P' est $\Delta' = 4(1+8i)^2 + 12(17-7i) = 4(-63+16i+51-21i) = -4(12+5i)$. On peut remarquer que $\Delta' = -4i\Delta$, et se convaincre que $2e^{-i\pi/2} = \sqrt{2}(1-i)$ est une racine de $-4i$ pour en déduire que l'une des racines de Δ' est $\sqrt{2}(1-i)(3-2i) = \sqrt{2}(1-5i)$. Les racines de P' sont donc données par
$$w_1 = \frac{2(1+8i) + \sqrt{2}(1-5i)}{6} \simeq 0,57 + 1,49i, \quad w_2 = \frac{2(1+8i) - \sqrt{2}(1-5i)}{6} \simeq 0,10 + 3,84i.$$
On remarque que les points d'affixe w_1, w_2 sont à l'intérieur du triangle $M_1M_2M_3$. C'est en fait une propriété générale des racines des polynômes et l'objet du théorème de Gauss-Lucas.

Exercice 3. Dans cet exercice, on étudie aux fonctions hyperboliques (cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique), définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
2. Démontrer que sinh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Comme sinh est une bijection, on peut donc définir sa fonction réciproque *argument sinus hyperbolique*, notée argsh.

3. Quel est l'ensemble de définition de argsh ? Démontrer que argsh est dérivable sur son ensemble de définition, et que sa dérivée est donnée par

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On s'intéresse maintenant au comportement de la fonction argument sinus hyperbolique au voisinage de 0.

4. Que vaut argsh(0) ?
5. Déterminer le développement limité de $(1+h)^{-1/2}$ en 0 à l'ordre 2.
6. En déduire le développement limité de argsh en 0 à l'ordre 5.
7. (Application) Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{argsh}(x) - \sin(x)}{x^5}.$$

Solution. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned}\cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}\right)\\ &= \frac{1}{4}(2+2) = 1.\end{aligned}$$

2. On remarque que $\sinh' = \cosh > 0$, donc sinh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, $\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty$, et $\lim_{x\to+\infty} \sinh(x) = +\infty$, donc sinh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Comme l'image par sinh de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ tout entier, argsh est définie sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, sinh est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée ne s'annule jamais, ce qui implique que argsh est dérivable sur son ensemble de définition, et que sa dérivée est donnée par

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{argsh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{argsh}(x))}.$$

On utilise alors la relation de la question 1 : pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\cosh(y) = \sqrt{1+\sinh^2(y)}$, et donc en particulier,

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{argsh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4. $\sinh(0) = 0$, et donc $\operatorname{argsh}(0) = 0$.
5. C'est un développement limité usuel, qu'on pourrait par ailleurs retrouver avec la formule de Taylor :

$$\begin{aligned}(1+h)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}h + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\frac{h^2}{2} + o(h^2)\\ &= 1 - \frac{h}{2} + \frac{3h^2}{8} + o(h^2)\end{aligned}$$

lorsque $h \to 0$.

6. On commence par établir le DL de argsh′ en 0 à l'ordre 4 :

$$\operatorname{argsh}'(x) = (1+x^2)^{-1/2} == 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4),$$

et donc, par intégration, et comme $\operatorname{argsh}(0) = 0$,

$$\operatorname{argsh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$$

lorsque $x \to 0$.

7. Il suffit de comparer les développements limités de sin et de argsh à l'ordre 5 en 0.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5),$$

donc $\operatorname{argsh}(x) - \sin(x) = \left(\frac{3}{40} - \frac{1}{120}\right)x^5 + o(x^5) = \frac{x^5}{15} + o(x^5)$, d'où finalement

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{argsh}(x) - \sin(x)}{x^5} = \frac{1}{15}.$$