Devoir sur table — 26 mars 2021
Corrigé

Les exercices peuvent être traités indépendamment les uns des autres. L'exercice 4 est un problème un peu plus long. Quelques formules de développements limités usuels sont rappelées dans le formulaire, à la fin du sujet.

Exercice 1. Établir le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \sin(x + \pi/2)$ en $x_0 = \pi/2$, à l'ordre 3.
2. $f_2(x) = x^x$ en $x_0 = 1$, à l'ordre 2.
3. $f_3(x) = \sin(\ln(1 + x))$ en $x_0 = 0$, à l'ordre 3.

Solution.

1. On cherche le DL de $f_1(\pi/2 + h) = \sin(\pi + h) = -\sin(h)$ en 0. En appliquant directement la formule du formulaire, on obtient :
$$f_1(\pi/2 + h) = -h + \frac{h^3}{6} + o(h^3)$$
lorsque $h \to 0$.
2. On cherche lde DL de $f_2(1 + h) = (1 + h)^{1+h} = \exp((1 + h)\ln(1 + h))$ en 0. Alors
$$\begin{aligned} f_2(1+h) &= \exp\left((1+h)\left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right)\right) \\ &= \exp\left(h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) \\ &= 1 + h + h^2 + o(h^2) \quad \text{lorsque } h \to 0. \end{aligned}$$
3. On calcule directement :
$$\begin{aligned} f_3(x) &= \sin\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{lorsque } x \to 0. \end{aligned}$$

Exercice 2. Déterminer la limite de
$$\frac{\sin(\ln(1 + x)) - \ln(1 + \sin x)}{x^3}$$
lorsque x tend vers 0. (*On pourra utiliser le développement limité de l'exercice 1*).

Solution. On calcule le développement limité de $\ln(1 + \sin x)$ en 0.
$$\begin{aligned} \ln(1+\sin x) &= \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{lorsque } x \to 0. \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de l'exercice précédent, on en déduit que $\sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x) = o(x^3)$ lorsque $x \to 0$, et par conséquent

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\ln(1+x)) - \ln(1+\sin x)}{x^3} = 0.$$

Exercice 3. On cherche les solutions complexes de l'équation

$$z^4 - (2-4i)z^2 = 3 - 4i. \tag{1}$$

1. Commencer par résoudre l'équation du second degré, d'inconnue $w \in \mathbb{C}$,

$$w^2 - (2-4i)w - 3 + 4i = 0. \tag{2}$$

2. En déduire les quatre solutions complexes de l'équation (1).

Solution. 1. On calcule le discriminant du trinôme :

$$\Delta = (2-4i)^2 + 12 - 16i = -32i.$$

On doit maintenant chercher une racine de Δ. On peut résoudre le système usuel, ou bien remarquer que $(1+i)^2 = 2i$, et donc $\Delta = -16(1+i)^2 = (4i(1+i))^2$, et en déduire que $-4+4i$ est une racine de Δ. Les solutions de l'équation sont alors

$$w_1 = \frac{2-4i-4+4i}{2} = -1, \quad w_2 = \frac{2-4i+4-4i}{2} = 3-4i.$$

2. Le nombre z est solution de l'équation (1) si, et seulement si, z^2 est solution de l'équation (2). Autrement dit, z est une solution ssi z est une racine complexe de w_1 ou de w_2. Calculons-les : les racines de w_1 sont i et $-i$. Par idendification des parties réelles et imagniaires, $x+yi$ est une racine de w_2 ssi

$$\begin{cases} x^2+y^2 = |w_2| \\ x^2-y^2 = \mathrm{Re}(w_2) \\ 2xy = \mathrm{Im}(w_2) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ x^2-y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ xy = -2 \end{cases}$$

et donc les racines de w_2 sont $2-i$ et $-2+i$. Finalement, on a montré que l'ensemble des solutions de l'équation (1) est

$$\{i, -i, 2-i, -2+i\}.$$

Exercice 4. *Historiquement, les décimales de π étaient déterminées en approximant un cercle par un polygone régulier dont on peut calculer le périmètre. Cette méthode est restée d'actualité jusqu'à ce qu'Isaac Newton change la donne grâce à des développements en série (qui sont essentiellement des développements limités).*

Le meilleur résultat connu à cette époque était celui de Ludolph Van Ceulen, qui a méticuleusement calculé, à la main, le périmètre d'un polygone régulier à 2^{62} côtés. Ce calcul, qui lui demanda 25 ans de travail (!!), lui permit de déterminer 35 décimales de π. En 1666, alors confiné chez lui en raison de l'épidémie de la peste qui ravage l'Angleterre, Isaac Newton comprend comment utiliser les polynômes pour approximer des fonctions, ce qui lui permet de développer une nouvelle formule d'approximation de π, beaucoup plus facile à mettre en œuvre.

Dans cet exercice, nous revisitons la méthode de Newton grâce au développement limité de la fonction arctan. *Le type de formule de que nous allons démontrer reste utilisé aujourd'hui pour calculer π avec une très grande précision !*

1. Démontrer que le développement limité de la fonction arctan en 0 à l'ordre $2n+1$ s'écrit
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \quad \text{lorsque } x \to 0.$$
On pourra éventuellement commencer par établir le développement limité de $\arctan'$ en 0.

L'idée est d'utiliser la formule $\arctan(1) = \pi/4$ *et remplacer* arctan *par son développement limité pour en déduire une approximation de* π*. On admet ici, même si ce n'est pas très dur à démontrer, qu'on obtient une bonne approximation, au sens où la différence entre* $\arctan(x)$ *et son développement limité à l'ordre* n *tend vers 0 quand* n *tend vers l'infini.*

2. (Application) Grâce au DL d'arctan à l'ordre 1, démontrer que $\pi \simeq 4$.

*Cette approximation, bien sûr, n'est pas très bonne. Le problème vient du fait qu'on utilise le développement limité d'*arctan *en* 0 *pour calculer* $\arctan(1)$*. On obtiendrait un meilleur résultat avec une formule faisant intervenir des termes de la forme* $\arctan(x)$*, avec* x *proche de* 0 *: c'est ce qu'on cherche à obtenir jusqu'à la fin du problème.*

3. Le but de cette question est de montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|\arctan x + \arctan y| < \pi/2$ et $xy \neq 1$,
$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right). \tag{3}$$
   (a) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a, b, a+b$ sont dans le domaine de définition de tan,
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$
   (b) Expliquer pourquoi $\tan(\arctan x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Inversement, est-ce vrai que $\arctan(\tan x) = x$ pour tout x dans le domaine de définition de tan ? Le démontrer ou fournir un contre-exemple.
   (c) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xy \neq 1$. Conclure en posant $a = \arctan x$ et $b = \arctan y$.

4. (Formule d'Euler) Montrer que
$$\arctan 1 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

5. (Formule de John Machin) En utilisant la formule (3), montrer que $2 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{5}{12}$, puis que $4 \arctan \frac{1}{5} = \arctan \frac{120}{119}$. En conclure que
$$\arctan 1 = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

6. (Application) Utiliser la formule d'Euler et le développement limité d'arctan à l'ordre 1 pour en déduire une approximation de π. Faire la même chose avec la formule de John Machin. Combien de décimales de π sont correctes pour chacune de ces approximations ? (*Indication :* $4/239 \simeq 0,02$, $\pi \simeq 3,14$.)

À titre indicatif, on retrouve les 35 décimales de π *de Van Ceulen avec la formule de Machin en faisant un DL d'ordre 21, ce qui n'est pas rien, mais qui se calcule en un temps considérablement plus cours que 25 ans. Un ordinateur le fait instantanément !*

Solution. 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Le développement limité de $\arctan'$ à l'ordre $2n$ en 0 est donc
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$
lorsque $x \to 0$. On peut intégrer ce développement limité pour en déduire que
$$\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$
lorsque $x \to 0$. Comme de plus, $\arctan(0) = 0$, on a démontré la formule de l'énoncé.

2. À l'ordre 1, $\arctan(x) = x + o(x)$, et donc $\pi/4 = \arctan(1) \simeq 1$, d'où $\pi \simeq 4$.
3. (a) On développe le cosinus et le sinus avec les formules habituelles, puis divise par $\cos a \cos b$:

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.\end{aligned}$$

   (b) $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2[$ est la fonction réciproque de tan restreinte $]-\pi/2, \pi/2[$, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $x' \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\tan(\arctan x) = x \text{ et } \arctan(\tan(x')) = x'.$$

   Par contre, la seconde égalité n'est pas vraie pour tout x' du domaine de définition de tangente : par exemple, $\arctan(\tan \pi) = \arctan 0 = 0$.

   (c) Comme indiqué, on pose $a = \arctan x$ et $b = \arctan y$, et donc $\tan a = x$, $\tan b = y$ d'après la question précédente, et

$$\tan(\arctan x + \arctan y) = \frac{x+y}{1-xy}.$$

   On applique finalement la fonction arctan à cette égalité pour obtenir

$$\arctan(\tan(\arctan x + \arctan y)) = \arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

   car $|\arctan x + \arctan y| < \pi/2$.

4. C'est une application directe de la formule qu'on a démontré : si $x = 1/2$ et $y = 1/3$,

$$\arctan(1/2) + \arctan(1/3) = \arctan\left(\frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/6}\right) = \arctan 1.$$

5. Idem : $2\arctan(1/5) = \arctan\left(\frac{2/5}{1-1/25}\right) = \arctan(5/12)$, et on utilise la même formule pour trouver $4\arctan(1/5) = 2\arctan(5/12) = \arctan\left(\frac{10/12}{1-25/144}\right) = \arctan(120/119)$. Finalement,

$$\begin{aligned}4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} &= \arctan\frac{120}{119} - \arctan\frac{1}{239} \\ &= \arctan\left(\frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119\times 239}}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{120 \times 239 - 119}{119 \times 239 + 120}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{119 \times 239 - 119 + 239}{119 \times 239 + 120}\right) \\ &= \arctan 1\end{aligned}$$

Fin du sujet

Formulaire

Développements limités usuels en $x_0 = 0$, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)
\end{aligned}$$

lorsque x tend vers 0.