IUT de Paris

2ème année STID

Notes de cours

Option Mathématiques avancées

Nathaël Gozlan, Simon Zugmeyer

Chapitre 1

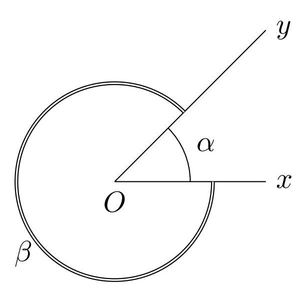
Fonctions trigonométriques

1.1 Angles et triangles rectangles

Dans cette partie, on introduit la notion intuitive d'angle et on rappelle comment les fonctions trigonométriques usuelles sont définies comme rapports entre longueurs de côtés d'un triangle rectangle.

1.1.1 Angles de demi-droites

Définition 1. Un angle est une portion de plan délimitée par deux demi-droites du plan ayant la même origine. Les deux demi-droites s'appellent les côtés de l'angle. L'origine commune des deux demi-droites s'appelle le sommet de l'angle.



Deux demi-droites définissent donc deux angles, l'un "rentrant" (α sur la figure) et l'autre "sortant" (β sur la figure). Les angles sont souvent notés à l'aide des lettres grecques α, β, θ.

1.1.2 Degrés et radians

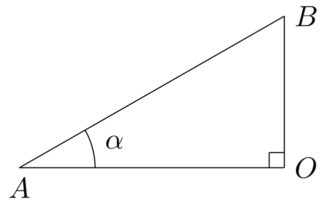
On mesure un angle α à l'aide d'un rapporteur gradué en degrés ou en radians. Le radian est une mesure d'angles proportionnelle au degré et tel qu'un angle plat mesure π radians. On a donc

$$\text{Mesure en radians}\,(\alpha) = \frac{\pi}{180}\,\text{Mesure en degrés}\,(\alpha)$$

En particulier, un angle droit mesure $\frac{\pi}{2}$ radians et un tour complet correspond à 2π radians.

1.1.3 Triangle rectangle et fonctions trigonométriques

Définition 2. Considérons un triangle OAB rectangle en O et soit α l'angle en A.



Les fonctions cosinus, sinus et tangente sont définies par

$$\cos(\alpha) = \frac{OA}{AB}, \quad \sin(\alpha) = \frac{OB}{AB}, \quad \tan(\alpha) = \frac{OB}{OA}.$$

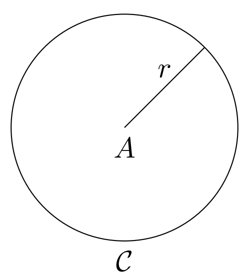
1.2 Le cercle trigonométrique

Dans cette partie, on adopte une vision plus rigoureuse des angles et des fonctions trigonométriques fondée sur le cercle trigonométrique.

1.2.1 Périmètre d'un cercle.

On rappelle que la longueur d'un cercle (ou son périmètre) est proportionnelle à son rayon : si $\mathcal{C}$ est un cercle de centre A et de rayon r, alors

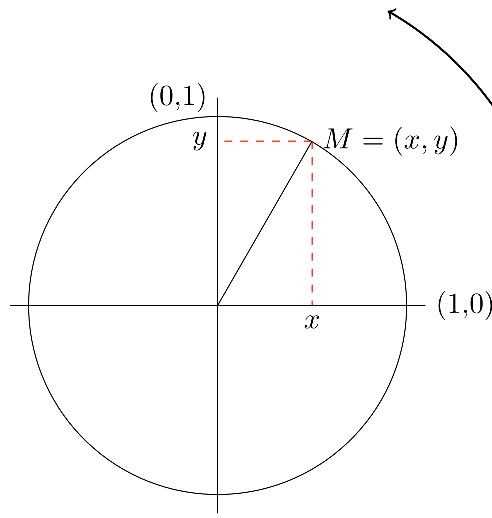
$$\text{Périmètre}\,(\mathcal{C}) = 2\pi r.$$



On en déduit immédiatement que la longueur d'un demi-cercle est πr, celle d'un quart de cercle $\pi r/2$, etc.

1.2.2 Le cercle trigonométrique

On se place dans $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ et on considère le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $O = (0, 0)$ et de rayon 1, appelé cercle unité ou cercle trigonométrique.

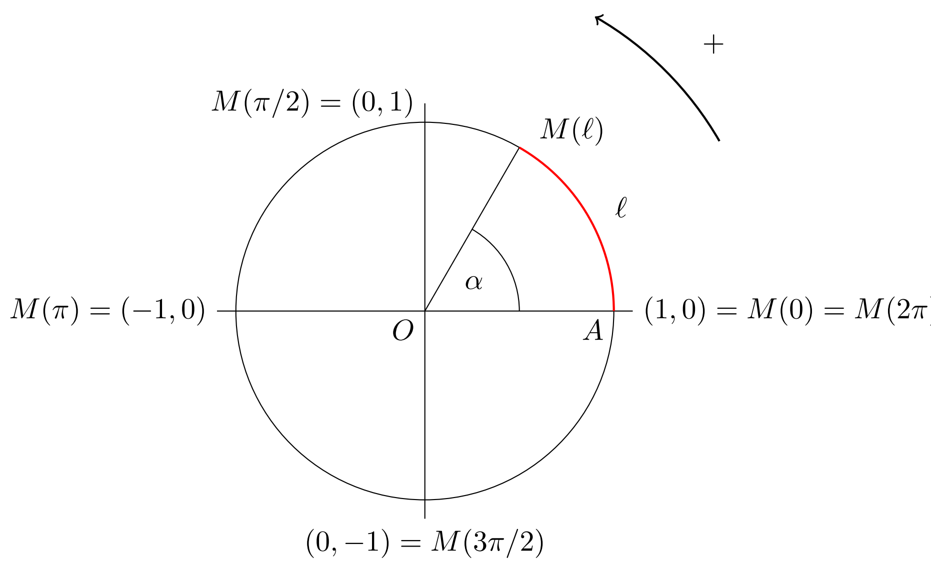


Ce cercle est constitué de tous les points à distance 1 de l'origine O, c'est-à-dire

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Par convention, on adopte le *sens inverse des aiguilles* d'une montre comme sens direct, comme indiqué sur la figure ci-dessus. On parle du sens trigonométrique.

On va maintenant repérer un point M du cercle unité $\mathcal{C}_1$ par la longueur ℓ de l'arc de cercle joignant le point $A = (1, 0)$ à M dans le sens trigonométrique direct.



Quand ℓ varie de 0 à 2π, le point $M(\ell)$ décrit tout le cercle trigonométrique en passant successivement par les points $(0, 0)$ (pour $\ell = 0$), $(0, 1)$ (pour $\ell = \pi/2$), $(1, 0)$ (pour $\ell = \pi$), $(0, -1)$ (pour $\ell = 3\pi/2$) et de nouveau $(0, 0)$ (pour $\ell = 2\pi$). Le nombre ℓ est la mesure en radian de l'angle α représenté sur le dessin. On fait très souvent l'abus de notation de considérer que $\ell = \alpha$ (on assimile l'angle à sa mesure en radian), si bien qu'on note aussi $M(\alpha)$ à la place de $M(\ell)$.

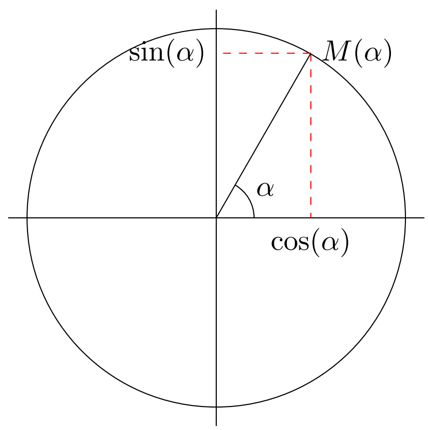
On étend la définition de $M(\ell)$ pour tout $\ell \in \mathbb{R} \setminus [0, 2\pi]$ de la manière suivante :

1. Pour $\ell > 2\pi$: on interprète ℓ comme un certain nombre de tours complets suivi d'un chemin de longueur $< 2\pi$. Plus formellement, si $\ell = 2k\pi + r$, avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [0, 2\pi[$, on pose $M(\ell) = M(r)$. Le point a parcouru k tours entiers puis un arc de cercle de longueur r dans le sens trigonométrique direct.
2. Pour $\ell < 0$: on interprète ℓ comme un déplacement dans le sens trigonométrique indirect. Plus formellement, cela revient à définir $M(\ell)$ comme le symétrique de $M(-\ell)$ par rapport à l'axe (Ox).

1.3 Fonctions trigonométriques

1.3.1 Définition

Définition 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, considérons le point $M(x)$ introduit précédemment. On définit $\cos(x)$ comme son abscisse et $\sin(x)$ comme son ordonnée. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{N}\}$, on définit également $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



Remarquons que cette définition généralise la définition dans les triangles rectangles. En effet, considérons $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et le point $B(x)$ qui est le projeté de $M(x)$ sur l'axe des abscisses. On obtient bien que $OB(x)M(x)$ est rectangle en $B(x)$ et $\cos(x) = \frac{OB(x)}{OM(x)}$ car $OM(x) = 1$. De même, $\sin(x) = \frac{B(x)M(x)}{OM(x)}$. Enfin, la relation $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ était déjà vérifiée.

Les fonctions cos, sin et tan peuvent donc être vues comme des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{N}\}$ en ce qui concerne la fonction tan).

1.3.2 Relation entre les angles et valeurs particulières

$$
\begin{array}{lll}
\cos 0 = 1 & \sin 0 = 0 & \tan 0 = 0 \\
\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} & \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & \tan \frac{\pi}{4} = 1 \\
\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} & \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} & \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \\
\cos \frac{\pi}{2} = 0 & \sin \frac{\pi}{2} = 1 & \tan \text{ non défini en } \frac{\pi}{2}
\end{array}
$$

Le dessin du cercle trigonométrique permet de retrouver ces valeurs particulières, ainsi que les relations qui relient à $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ les valeurs de ces fonctions en $-x$, $x+\pi$, $\frac{\pi}{2}-x$, etc. (cf Exercice 1 du TD 1).

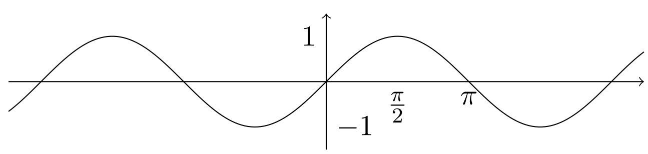
1.3.3 Premières propriétés

La fonction sinus :

1. sin est définie sur $\mathbb{R}$.
2. sin est 2π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x+2\pi) = \sin(x)$
3. sin est une fonction impaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x$.
4. sin est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin' x = \cos x$$

Graphe de la fonction sin :



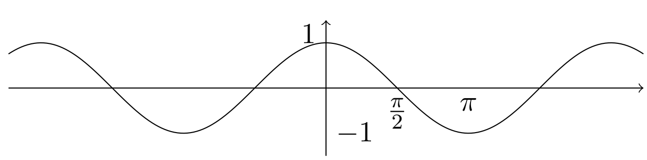
L'imparité de la fonction sin entraîne que son graphe admet le point $(0,0)$ comme centre de symétrie.

La fonction cosinus :

1. cos est définie sur $\mathbb{R}$.
2. cos est 2π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x+2\pi) = \cos(x)$
3. cos est une fonction paire : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x$.
4. cos est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos' x = -\sin x$$

Graphe de la fonction cos :

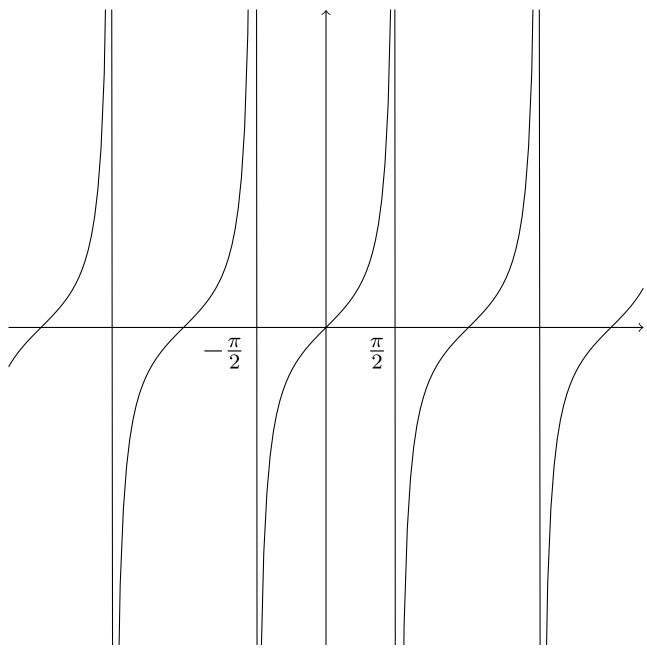


La parité de la fonction cos entraîne que son graphe admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

La fonction tangente :

1. tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{N}\}$.
2. tan est π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{N}\}, \tan(x+\pi) = \tan(x)$
3. tan est une fonction impaire : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{N}\}, \tan(-x) = -\tan x$
   Cela entraîne que son graphe admet le point $(0,0)$ comme centre de symétrie.
4. tan est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{N}\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{N}\right\}, \quad \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$



1.3.4 Autres propriétés

Proposition 4.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

2. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y & \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x & \cos(2x) &= 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

La première égalité est une conséquence du théorème de Pythagore. Les autres peuvent se démontrer à l'aide des nombres complexes (cf TD 2).

1.3.5 Réciproques des fonctions trigonométriques

Bijections, fonctions réciproques

Soit $f : E \to F : x \mapsto f(x)$ une fonction définie sur un ensemble E et à valeurs dans un ensemble F. On dit que f est une *bijection* si pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, f est bijective si et seulement si pour tout $y \in F$, l'équation

$$f(x) = y, \qquad x \in E$$

admet une *unique solution*. On note cette solution $f^{-1}(y)$. On a ainsi défini une nouvelle fonction $f^{-1} : F \to E : y \mapsto f^{-1}(y)$ appelée fonction *réciproque* de f. On a les relations suivantes :

$$f(f^{-1}(y)) = y, \qquad \forall y \in F \qquad \text{et} \qquad f^{-1}(f(x)) = x, \qquad \forall x \in E.$$

Voici quelques exemples :

1. La fonction $[0, +\infty[\to [1, +\infty[: x \mapsto x+1$ est une bijection dont la réciproque est $[1, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto x - 1$.
2. La fonction $[0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto x^2$ est une bijection dont la bijection réciproque est $[0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto \sqrt{x}$.
3. La fonction $\mathbb{R} \to]0, +\infty[: x \mapsto e^x$ est une bijection dont la bijection réciproque est $]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \ln x$.

Le critère suivant permet de montrer qu'une application est une bijection :

Proposition 5. *Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ des intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to J$ une application. Si*

1. *f est strictement monotone, et*
2. *$f(I) = J$,*

alors f est une bijection entre I et J. De plus, la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ a même monotonie que f.

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que f est strictement croissante (car si elle ne l'est pas, on peut par exemple considérer la fonction $-f$). Pour tout $y \in J = f(I)$, il existe au moins un x tel que $f(x) = y$. Si $x' < x$, on a $f(x') < f(x) = y$ et si $x' > x$, alors $f(x') > f(x) = y$. Donc si $x' \neq x$, $f(x') \neq f(x)$. On en déduit que l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution.

Montrons maintenant que f^{-1} a le même sens de monotonie que f. Si $y < y'$, alors on a $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. En effet, si on avait $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$, alors comme f est croissante, on aurait $f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y'))$ et donc $y \geq y'$, ce qui est absurde. □

Proposition 6. *Si $f : I \to J$ est une bijection entre deux intervalles I, J de $\mathbb{R}$ et si f est dérivable, alors en tout point $y \in J$ où $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, la fonction f^{-1} est dérivable et la dérivée est donnée par la formule*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}.$$

Démonstration. On admet que f^{-1} est dérivable et on se contente de montrer la formule. Par dérivation d'une composée, $(f \circ f^{-1})'(y) = (f^{-1})'(y) f'(f^{-1}(y))$. Or, $f \circ f^{-1}(y) = y$, et donc $(f \circ f^{-1})'(y) = 1$. Par conséquent,

$$1 = (f^{-1})'(y) f'(f^{-1}(y)), \qquad \forall y \in J.$$

Si y est tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, on obtient donc la formule annoncée. $\square$

1.3.6 Les fonctions circulaires inverses

Les fonctions trigonométriques sin, cos et tan ne sont pas des bijections, et n'ont par conséquent pas de fonction réciproque. On peut cependant les restreindre à des intervalles bien choisis pour les rendre bijectives. Les fonctions ainsi obtenues sont parfois notées $\sin, \cos, \tan$ elles aussi, même si c'est un abus de notation.

Les réciproques de ces fonctions restreintes sont notées respectivement arcsin, arccos et arctan.

La fonction arcsin **:** on considère la restriction de la fonction sin à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$, qui est une bijection entre son ensemble de départ et $[-1, 1]$.

$$f : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array} \qquad \arcsin = f^{-1} : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ y & \mapsto & \arcsin(y) \end{array}$$

La dérivée de la fonction arcsin est alors donnée par

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

En effet, d'après la formule de dérivation des fonctions réciproques,

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{f'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))}.$$

Posons $\theta = \arcsin(y) \in [-\pi/2, \pi/2]$. Comme $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$, on en déduit que $\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta} = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Comme de plus, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, on a $\cos\theta \geq 0$, et on peut finalement conclure que $\cos\theta = \sqrt{1 - x^2}$, ce qui démontre la formule de la dérivée.

La fonction arccos **:** cette fois, on considère la restriction de cos à $[0, \pi]$, qui est une bijection.

$$g : \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array} \qquad \arccos = g^{-1} : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \to & [0, \pi] \\ y & \mapsto & \arccos(y) \end{array}$$

et sa dérivée est donnée par

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

La fonction arctan **:** finalement, la restriction de tan à $]-\pi/2, \pi/2[$ est une bijection.

$$h : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x \end{array} \qquad \arctan = h^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ y & \mapsto & \arctan(y) \end{array}$$

dont la dérivée est

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Chapitre 2

Nombres complexes

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$: ce sont des inclusions strictes. Chaque nouvel ensemble a des propriétés que le précédent n'a pas.

$\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels, ceux qui servent à dénombrer. Ensemble stable par addition et multiplication.

$\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers relatifs : ensemble des nombres entiers positifs et négatifs (0 est positif et négatif). Tout entier relatif a un opposé : l'ensemble devient stable par soustraction.

$\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels : qui peuvent s'écrire comme une fraction. Tout rationnel non nul a un inverse : l'ensemble est stable par division.

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels, contient, en plus des rationnels, toutes les limites de suites de rationnels. Les réels π, $\sqrt{2}$ ou $e = \exp(1)$ sont des exemples de réels qui ne sont pas rationnels (en fait, il y a infiniment plus de réels non rationnels que de réels rationnels).

$\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes. Tout nombre complexe non nul a deux racines carrées. En particulier, tout réel strictement négatif (qui est aussi un nombre complexe) a deux racines carrées.

2.1 Définitions

2.1.1 Nombre complexe

On ajoute à l'ensemble $\mathbb{R}$ un nouvel élément noté i tel que $i^2 = -1$ (bien sûr $i \notin \mathbb{R}$). On définit alors l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par

$$\mathbb{C} = \{z : z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Si $z = x + iy$, on note $\mathrm{Re}(z) = x$ qui est appelé *partie réelle de* z et $\mathrm{Im}(z) = y$ est sa *partie imaginaire*.

Remarque 7. Soit z est un nombre complexe.

— $\mathrm{Im}(z)$ est un réel.

— Si $\mathrm{Im}(z) = 0$, alors z est un réel.

— Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, on dit que z est un *imaginaire pur*.

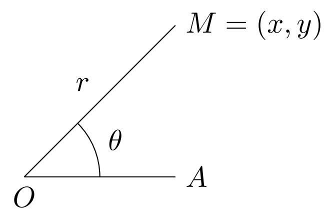
Définition 8 (Affixe)**.** Le nombre complexe $z = x + iy$ peut être représenté par le point du plan M de coordonnées (x, y). On dit alors que z est l'*affixe* de M.

2.1.2 Représentation polaire

Module et argument

Soit O le point de coordonnées $(0, 0)$ et A celui de coordonnées $(1, 0)$. Soit $z = x + iy$ un complexe. Le point M d'affixe z peut également être repéré en coordonnées polaires, c'est-à-dire par un couple (r, θ) où r est la distance OM, et θ est l'angle, défini modulo 2π, entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$.

Définition 9. Le nombre r est appelé le *module* de z, et θ son *argument*.



Les coordonnées cartésiennes (x, y) peuvent être retrouvées à partir des coordonnées polaires (r, θ) par

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Inversement, on peut trouver les coordonnées polaires à partir des cartésiennes :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \text{ si } x \neq 0$$

Cette dernière relation et la fonction arctan ne définissent par entièrement θ. Il faut utiliser également l'information concernant les signes respectifs de x et y.

Notation exponentielle complexe

Définition 10. On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

On peut alors écrire, pour un nombre complexe z de module r et d'argument θ,

$$z = x + iy = re^{i\theta}.$$

Cette écriture est appelée *forme trigonométrique* ou encore *forme polaire* du nombre z, par opposition à la *forme algébrique*.

2.2 Opérations

Dans tout cette section, on considère deux nombres complexes z et z', qu'on écrire aussi $z = x + iy = re^{i\theta}$ et $z' = x' + iy' = r'e^{i\theta'}$.

2.2.1 Addition

La somme de deux nombres complexes s'écrit simplement :

$$z + z' = x + x' + i(y + y').$$

Remarque 11. L'addition ne s'écrit pas de manière simple pour des nombres complexes sous forme polaire. La forme algébrique est (en général) bien plus appropriée.

2.2.2 Multiplication

On rappelle que $i^2 = -1$. En développant zz', on obtient donc

$$zz' = xx' - yy' + i(xy' + x'y).$$

Sous forme polaire, la règle de multiplication des exponentielles s'applique et on obtient la simple formule

$$zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}.$$

2.2.3 Conjugaison

Définition 12. On définit le *conjugué* de z et note $\bar{z}$ le nombre complexe

$$\bar{z} = x - iy.$$

La conjugaison jouit des propriétés suivantes :

Proposition 13.

1. *Les points du plan $M(z)$ et $M(\bar{z})$ correspondant sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. En particulier, z et $\bar{z}$ ont même module et leurs arguments sont opposés :*

$$\text{si } z = re^{i\theta}, \text{ alors } \bar{z} = re^{-i\theta};$$

2. $z\bar{z} = r^2 = x^2 + y^2$ *;*
3. $\bar{\bar{z}} = z$ *;*
4. $\bar{z} = z$ *si et seulement si z est un réel ;*
5. $\bar{z} = -z$ *si et seulement si z est un imaginaire pur ;*
6. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ *;*
7. $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$ *;*
8. $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$.

2.2.4 Inversion

Tout nombre complexe non nul admet un inverse, qui s'obtient facilement à partir de la forme polaire de z.

Soit $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Le module de z est alors nécessairement non-nul, et donc $z = re^{i\theta}$ avec $r \neq 0$. Par conséquent, z admet pour inverse $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$.

Pour inverser z quand il est écrit sous sa forme $x+iy$, on multiplie la fraction en haut et en bas par le conjugué du dénominateur. De manière générale, pour une fraction impliquant des nombres complexes, cette opération permet de se ramener à une fraction dont le dénominateur est réel :

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

2.2.5 Propriétés algébriques de $\mathbb{C}$

$(\mathbb{C}, +)$ est un groupe additif

1. $\mathbb{C}$ est stable par addition
2. l'addition est commutative : $z + z' = z' + z$
3. l'addition est associative : $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.
4. L'addition admet un élément neutre (0)
5. Tout élément admet un opposé.

$(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe multiplicatif

1. $\mathbb{C}^*$ est stable par multiplication
2. la multiplication est commutative : $zz' = z'z$
3. la multiplication est associative : $(zz')z'' = z(z'z'')$.
4. La multiplication admet un élément neutre (1)
5. Tout élément admet un inverse.

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps

1. $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe
2. $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe
3. les opérations sont distributives : $z(z' + z'') = zz' + zz''$

Chapitre 3

Formule de Taylor et développements limités

3.1 Notation o (« petit o »)

Définition 14. Soient f, g deux fonctions et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$; on dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Dans ce cas, on le note

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{lorsque } x \to x_0.$$

Exemples.

— $f = o(1)$ quand $x \to x_0$ signifie que $f(x) \to 0$ quand $x \to x_0$,
— $x^6 = o(x^2)$ quand $x \to 0$,
— $x^2 = o(e^x)$ quand $x \to +\infty$,
— $e^x = o(1/x)$ quand $x \to -\infty$,
— $\ln x = o(1/x)$ quand $x \to 0^+$.

De manière équivalente, on peut dire que $f(x) = o(g(x))$ lorsque $x \to x_0$ s'il existe une fonction ε (définie au voisinage de x_0) telle que $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to x_0$ et telle que $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.

3.2 Développements limités

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Définition 15 (Développement limité en 0)**.** Soit f définie au voisinage de 0, et soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *développement limité* (DL) d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$

Le polynôme P s'appelle la partie principale du développement limite de f : il constitue une approximation polynômiale de f au voisinage de 0.

Exemples.

— $1 + x + x^2 = 1 + x + o(x)$ lorsque $x \to 0$.

— $(1 + x)(1 - x + x^2) = 1 - x^3$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \frac{x^3}{1+x}\\ &= 1 - x + x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

lorsque $x \to 0$, car $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\frac{x^3}{1+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x} = 0$. Ainsi, $\frac{1}{1+x}$ se comporte comme $1 - x + x^2$ au voisinage de 0.

Proposition 16. *Si f est dérivable en 0, alors elle admet un développement limité d'ordre 1 en 0 donné par*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x) \quad \textit{lorsque } x \to 0.$$

Démonstration. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$ par définition du nombre dérivé, et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x} = 0,$$

ce qui démontre la proposition. □

Proposition 17.

1. *Unicité : la partie principale d'un DL est unique. Autrement dit, si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f(x) = P(x) + o(x^n) = Q(x) + o(x^n)$ lorsque $x \to 0$, alors $P = Q$.*
2. *Si f admet un DL d'ordre n, alors f admet un DL d'ordre p pour $p < n$. La partie principale est obtenue en ne gardant que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à p.*

Définition 18 (DL en x_0)**.** Soit f définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, et soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *développement limité* d'ordre n au voisinage de x_0 si $h \mapsto f(x_0 + h$ admet un DL d'ordre n en O, c'est-à-dire s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(x_0 + h) = P(h) + o(h^n)$$

lorsque $h \to 0$, ou, en posant $x = x_0 + h$,

$$f(x) = P(x - x_0) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

lorsque $x \to x_0$.

Exemple. DL de $\frac{1}{x}$ au voisinage de 1.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1 + (x-1)} = \frac{1}{1+y} \quad \text{où } y = x - 1$$

Quand x est proche de 1, y est proche de 0. D'après l'exemple précédent, au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + o(y^2)$$

donc, au voisinage de 1,

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$

Définition 19 (DL en $\pm\infty$)**.** Soit f définie sur un intervalle du type $]a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a[$), et soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *développement limité* d'ordre n au voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$) s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

lorsque $x \to +\infty$ (resp. $x \to -\infty$).

Exemple. DL de $\frac{x}{x+1}$ au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+y} \quad \text{où } y = \frac{1}{x}$$

Quand x est proche de $+\infty$, y est proche de 0. D'après le premier exemple, au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + o(y^2)$$

donc, au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

3.3 Opérations sur les développements limités

Dans toute cette section, on considère deux fonctions f et g admettant un DL d'ordre n en 0 :

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$
$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

3.3.1 Somme de DL

Proposition 20. *$f + g$ admet un DL d'ordre n en 0 :*

$$(f+g)(x) = R_n(x) + o(x^n) \qquad \text{avec} \quad R_n = P_n + Q_n$$

3.3.2 Produit de DL

Proposition 21. *fg admet un DL d'ordre n en 0 : $(fg)(x) = R_n(x) + o(x^n)$ où R_n est le polynôme obtenu en multipliant P_n et Q_n et en ne gardant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à n.*

Exemple. Supposons que $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ lorsque $x \to 0$. Déterminons le DL d'ordre 2 de $\frac{f(x)}{1+x}$ en 0.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{1+x} &= (1 + x + \frac{x^2}{2})(1 - x + x^2) + o(x^2) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} - x - x^2 - \frac{x^3}{2} + x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + o(x^2) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$

3.3.3 Composition de DL

Proposition 22. *Si $f(0) = 0$, $g \circ f$ admet un DL d'ordre n et $g \circ f(x) = R_n(x) + o(x^n)$ où R_n est le polynôme obtenu à partir de $Q_n \circ P_n$ et en ne gardant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à n.*

Exemple. Calculons le DL en 0 de $g \circ f$, en supposant que

$$g(y) = 1 - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{y^3}{4} + o(y^3)$$

lorsque $y \to 0$, et

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

lorsque $x \to 0$. Alors

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= (x - \frac{x^3}{6}) - \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{3}(x - \frac{x^3}{6})^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

Proposition 23. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n) \quad \textit{lorsque } x \to 0.$$

Démonstration. On remarque que $(1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}$, et donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &= 1 + x + \cdots + x^n + x^n \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

or $x/(1-x) \to 0$ lorsque $x \to 0$, ce qui achève la preuve. □

Application importante : Grâce à cette proposition, on peut calculer le DL de $1/g$, et même, ensuite, celui de $f/g = f \cdot \frac{1}{g}$ par simple produit.

Exemple. Déterminons le DL de $\frac{1}{f}$ à l'ordre 3, où f vérifie

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

lorsque $x \to 0$. On sait que

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + o(y^3),$$

et donc par composition,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{1 - (\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + o(x^3))} \\
&= 1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}\right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4}\right)^3 + o(x^3) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{8} + o(x^3) \\
&= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)
\end{aligned}$$

lorsque $x \to 0$.

3.3.4 Dérivation de DL

Proposition 24. *Si f est dérivable alors f' admet un DL d'ordre $n-1$ et*

$$f'(x) = P'(x) + o(x^{n-1})$$

Exemple. On sait que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 \cdots + x^n + o(x^n),$$

et donc, en dérivant, on obtient

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + o(x^{n-1})$$

lorsque $x \to 0$.

3.3.5 Intégration de DL

Proposition 25. *Soit F une primitive de f. F admet un DL d'ordre $n+1$ en 0 et*

$$F(x) = R(x) + o(x^{n+1})$$

où R est la primitive de P telle que $R(0) = F(0)$.

Exemple.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

d'où

$$\begin{aligned}
-\ln(1-x) &= -\ln(1-0) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)
\end{aligned}$$

3.4 Formule de Taylor

3.4.1 Fonctions n fois dérivables et développement de Taylor

Dans tout ce qui suit, I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On définit de manière récursive la classe des fonctions n fois derivable, $n \geq 1$.

Définition 26. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite n fois derivable, si f est dérivable et f' est $n-1$ fois derivable sur I. On note $f^{(n)}$ la derivée $n$ième de f. On dit que f est infiniment derivable sur I si f est n fois derivable sur I pour tout $n \geq 1$.

Exemples.
- Une fonction est deux fois derivable si f est derivable et si f' est dérivable. On note $f^{(2)}$ ou (le plus souvent) f'' la dérivée de f'.
- Une fonction est trois fois derivable si f est derivable et si f' est deux fois derivable. Cela veut dire d'après ce qui précède que f' est derivable et que $f^{(2)}$ est derivable. On note $f^{(3)}$ la dérivée de $f^{(2)}$. etc ...
- Les fonctions $\exp, \ln, \cos, \sin, \tan$ et les polynômes sont infiniment dérivables sur leurs intervalles de définition.

Théorème 27 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I et $x_0 \in I$. Alors il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to a$ telle que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

lorsque $h \to 0$, ou, de manière plus compacte,

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^n),$$

avec la convention $0! = 1$.

On écrit aussi souvent la formule de Taylor-Young sous la forme suivante :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

lorsque $x \to x_0$.

Remarque 28. La formule de Taylor-Young montre que la fonction f est bien approchée *localement* par le polynôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

qu'on appelle la *partie principale du développement de Taylor* au point x_0.

3.4.2 Exemples de développements de Taylor en 0

La fonction exponentielle. La fonction exp : $x \mapsto e^x$ est infiniment dérivable et $\exp^{(n)}(x) = e^x$. On a donc la formule suivante :

$$e^x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

quand $x \to 0$.

La fonction $\frac{1}{1-x}$. Posons $f(x) = \frac{1}{1-x}$ définie sur $I =]-\infty, 1[$. Calculons les dérivées n ième de f. On a tout d'abord $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, puis $f^{(2)}(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$, et $f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$, ... Pour un entier $n \geq 1$ quelconque, on a

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \qquad \forall x < 1.$$

Exercice : le montrer par récurrence sur n.
On en déduit que

$$f^{(n)}(0) = n!$$

et on retrouve donc la formule suivante :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

lorsque $x \to 0$.

La fonction $\frac{1}{1+x}$. Posons $g(x) = \frac{1}{1+x}$ définie sur $I =]-1, +\infty[$. Calculons les dérivées n ième de f. On a tout d'abord $g'(x) = \frac{(-1)}{(1+x)^2}$, puis $g^{(2)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, et $g^{(3)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$, ... Pour un entier $n \geq 1$ quelconque, on a

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}, \qquad \forall x > -1.$$

Exercice : le montrer par récurrence sur n.
On en déduit que

$$g^{(n)}(0) = (-1)^n n!$$

et on a donc la formule suivante :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

lorsque $x \to 0$.

La fonction $\ln(1+x)$. Posons $h(x) = \ln(1+x)$, alors $h'(x) = \frac{1}{1+x} = g(x)$ et donc $h^{(n)} = g^{(n-1)}$, $n \geq 1$. On en déduit que

$$h^{(n)}(0) = g^{(n-1)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

D'où la formule

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$$

lorsque $x \to 0$.

Les fonctions $\cos$ **et** $\sin$**.** Pour tout $k \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\cos^{(4k)} x &= \cos x \\
\cos^{(4k+1)} x &= -\sin x \\
\cos^{(4k+2)} x &= -\cos x \\
\cos^{(4k+3)} x &= \sin x
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

De même,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

3.4.3 Preuve de la formule de Taylor-Young

On va montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que pour toute fonction n fois dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ et tout $a \in I$ on a le développement suivant :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x), \qquad \forall x \in I,$$

où $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ est une fonction tendant vers 0 quand $x \to a$.

Cas n=1 : Comme f est dérivable en $a \in I$, on a $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to f'(a)$. Posons $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$, si $x \neq a$ et $\varepsilon(a) = 0$. La fonction ε tend vers 0 quand $x \to a$ et on a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x), \qquad \forall x \in I$$

ce qui prouve la formule de Taylor-Young pour $n = 1$.

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \geq 1$ et montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur I et $a \in I$. En appliquant la formule de Taylor-Young au rang n à la fonction f' (qui est bien n fois dérivable), on trouve :

$$f'(y) = f'(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(y-a)^k + (y-a)^n \varepsilon(y), \qquad \forall y \in I.$$

Intégrons cette égalité entre a et $x \in I$:

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) = \int_a^x f'(y)\,dy &= \int_a^x f'(a)\,dy + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} \int_a^x (y-a)^k\,dy + \int_a^x (y-a)^n \varepsilon(y)\,dy \\
&= f'(a)(x-a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!} \frac{(x-a)^{k+1}}{k+1} + \int_a^x (y-a)^n \varepsilon(y)\,dy \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x (y-a)^n \varepsilon(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que la fonction ε_2 définie par $\varepsilon_2(x) = \frac{1}{(x-a)^{n+1}} \int_a^x (y-a)^n \varepsilon(y)\, dy$ si $x \neq a$ et $\varepsilon_2(a) = 0$ est de limite nulle quand $x \to a$. On sait que $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to a$; par conséquent, pour tout $r > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|\varepsilon(y)| < r$ pour tout $y \in]a-\eta, a+\eta[$. Prenons $x \in]a, a+\eta[$, alors

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_2(x)| &= \frac{1}{(x-a)^{n+1}} \left| \int_a^x (y-a)^n \varepsilon(y)\, dy \right| \\
&\leq \frac{1}{(x-a)^{n+1}} \int_a^x (y-a)^n |\varepsilon(y)|\, dy \\
&< \frac{r}{(x-a)^{n+1}} \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \\
&< r
\end{aligned}$$

Un calcul analogue montre que si $x \in]a-\eta, a[$, alors on a aussi $|\varepsilon_2(x)| \leq r$. On a donc montré que

$$\forall r > 0, \exists \eta > 0, |x-a| < \eta \Rightarrow |\varepsilon_2(x)| < r.$$

Autrement dit $\varepsilon_2(x) \to 0$ quand $x \to a$, ce qui termine la démonstration.