

**TD 1 - Trigonométrie**

**Exercice 1** Exprimer en fonction de  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  et  $\tan \alpha$  les sinus et cosinus suivants (il faudra trouver les réponses grâce au cercle trigonométrique) :

- |                                     |                                    |                                    |
|-------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\sin(\alpha + 2\pi) =$          | , $\cos(\alpha + 2\pi) =$          | , $\tan(\alpha + 2\pi) =$          |
| 2) $\sin(\alpha + \pi) =$           | , $\cos(\alpha + \pi) =$           | , $\tan(\alpha + \pi) =$           |
| 3) $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) =$ | , $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) =$ | , $\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) =$ |
| 4) $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$ | , $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$ | , $\tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$ |
| 5) $\sin(-\alpha) =$                | , $\cos(-\alpha) =$                | , $\tan(-\alpha) =$                |
| 6) $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) =$ | , $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) =$ | , $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) =$ |
| 7) $\sin(\pi - \alpha) =$           | , $\cos(\pi - \alpha) =$           | , $\tan(\pi - \alpha) =$           |

**Exercice 2**

- 1) Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $0 \leq x \leq \pi$  et  $\cos(x) = \frac{1}{3}$ . Combien vaut  $\sin(x)$  ?
- 2) Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| \leq \frac{\pi}{2}$  et  $\sin(x) = -\frac{1}{4}$ . Combien vaut  $\cos(x)$  ?
- 3) Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $\pi \leq x \leq 2\pi$  et  $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Combien vaut  $\sin(x)$  ?
- 4) Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  et  $\sin(x) = \sqrt{3}$ . Combien vaut  $\cos(x)$  ?

**Exercice 3** En utilisant que  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , montrer que  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**Exercice 4** Montrer que  $\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Exercice 5**

- 1) Rappeler l'expression de  $\cos(2\alpha)$  en fonction de  $\cos(\alpha)$  et en déduire  $\cos(\frac{\pi}{12})$  et  $\sin(\frac{\pi}{12})$ .
- 2) Exprimer en fonction de  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  :

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \cos(x - \pi) \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

**Exercice 6** Donner le domaine de définition et la période des fonctions suivantes :

$$f(x) = \cos(2x) \quad g(x) = \cos(3x) + \sin(x) \quad h(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$$

**Exercice 7** Donner le domaine de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = x \cos(x) - \sin(2x) \quad g(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad h(x) = \frac{\cos(3x) - \sin(2x)}{\cos(x)^2}$$

**Exercice 8** En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$$

**Exercice 9** Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin(x) - 2 \cos(x) \quad g(x) = \sin(x) \cos(x) \quad h(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$
$$k(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \quad \ell(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\sin(x)}} \quad \tan \quad \frac{1}{\tan}$$

**Exercice 10** 1) Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties

$$I = \int_0^\pi x \sin(x) dx \quad J = \int_0^\pi x \cos(3x) dx$$

2) Calculer les intégrales suivantes à l'aide de deux intégrations par parties

$$K = \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x) dx \quad L = \int_0^{\pi/2} e^x \sin(x) dx \quad M = \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos(x) dx$$

**Exercice 11** Donner les valeurs suivantes :

$$a = \arcsin(1), \quad b = \arccos(1/2), \quad c = \arctan(1),$$
$$d = \arccos(-\sqrt{3}/2), \quad e = \arctan(\sqrt{3}), \quad f = \arcsin(-1/2).$$

**Exercice 12** Donner le domaine de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \arcsin(3x) \quad g(x) = \frac{\arccos(1-x)}{x} \quad h(x) = \frac{x \arctan(x)}{1 - \arctan(x)}$$

**Exercice 13** Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

**Exercice 14** En calculant sa dérivée, montrer que la fonction suivante est constante sur  $] -1, 1[$  et donner sa valeur

$$f(x) = \arccos(x) + \arcsin(x).$$