

# T D 1

## Ex 1

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1) $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$           | $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$           | $\tan(\alpha + 2\pi) = \tan \alpha$                     |
| 2) $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$           | $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$           | $\tan(\alpha + \pi) = +\tan \alpha$                     |
| 3) $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha$  | $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin \alpha$ | $\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan \alpha}$ |
| 4) $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos \alpha$ | $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin \alpha$  | $\tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan \alpha}$ |
| 5) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$                | $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$                 | $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$                          |
| 6) $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$  | $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$  | $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan \alpha}$  |
| 7) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$            | $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$           | $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$                     |

## Ex 2

- 1)  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  donc  $\sin^2 x = \frac{8}{9}$ . Or  $0 \leq x \leq \pi$  donc  
 $\sin x \geq 0$  d'où  $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
- 2)  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  donc  $\cos^2 x = \frac{15}{16}$ . Or  $|x| \leq \frac{\pi}{2}$  donc  
 $\cos x \geq 0$  d'où  $\cos x = \frac{\sqrt{15}}{4}$
- 3)  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  donc  $\sin^2 x = \frac{2}{3}$ . Or  $\pi \leq x \leq 2\pi$  donc  
 $\cos x \leq 0$  d'où  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
- 4)  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  donc un tel  $x$  n'existe pas car  $\sin^2 x \geq 1$ .

## Ex 3

Em  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$ . Or  $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$

donc  $2 \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$

$$\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

Or,  $\sin \frac{\pi}{4} \geq 0$  donc  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ex 4

$$1 + \tan^2 \theta = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

Ex 5

1)  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$  ( $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$  et  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ )

donc  $\cos \frac{\pi}{6} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{12} - 1$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

Or  $0 \leq \frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi}{2}$  donc  $\cos \frac{\pi}{12} \geq 0$  d'où  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

2)  $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3}$   
 $= \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$$

$$\cos(x - \pi) = -\cos x$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$$

Ex 6

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ .  $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \cos(2x + 2T) = \cos 2x$   
 $\Leftrightarrow 2x + 2T = 2x + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$   
 $\Leftrightarrow T = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

donc  $f$  est  $\pi$ -périodique

$\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ .  $g(x + T) = g(x) \Leftrightarrow \cos(3x + 3T) + \sin(x + T) = \cos 3x + \sin x$

Il suffit que  $x + T = x + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

donc  $g$  est  $2\pi$ -périodique

$\tan y$  est défini si  $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

donc  $h(x)$  est défini si  $\frac{\pi}{2} + 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow 3x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

On  $\tan(x+\pi) = \tan x \Leftrightarrow \pi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

donc  $h(x+\pi) = h(x) \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 3x + k\pi = \frac{\pi}{2} + 3x + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \pi = k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$h$  est  $\frac{\pi}{3}$ -périodique.

Ex 7

$f_g = \mathbb{R}$ .  $f'(x) = \cos x - x \sin x - 2 \cos 2x$

$D_g = \mathbb{R}^*$ .  $g'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

$D_h = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$  car  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$h'(x) = \frac{(-3 \sin 3x - 2 \cos 2x) \cos^2 x - (\cos 3x - \sin 2x) (-2 \sin x \cos x)}{\cos^4 x}$$
$$= \frac{(3 \sin 3x + 2 \cos 2x) \cos x + 2(\cos 3x - \sin 2x) \sin x}{\cos^3 x}$$

Rappel :

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(g(f(x)))' = f'(x) g'(f(x))$$

Ex 8

Rappel : Si  $f$  est dérivable en  $a$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

\*  $\sin$  est dérivable et  $\sin' = \cos$  donc en appliquant la définition de la dérivée à

$$\begin{cases} f = \sin \\ a = 0 \\ h = x \end{cases}$$

$$\cos(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin 0}{x} \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

\*  $\cos$  est dérivable et  $\cos' = -\sin$ . On applique la définition de la dérivée à

$$\begin{cases} f = \cos \\ a = \frac{\pi}{2} \\ h = x - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$-\sin \frac{\pi}{2} = \lim_{x - \frac{\pi}{2} \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2}) - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} \quad \text{d'où} \quad \lim_{x - \frac{\pi}{2} \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$$

### Ex 3

\* Une primitive de  $f$  est  $F(x) = -\cos x - 2 \sin x$

\* Rappel : [Une primitive de  $u' u^\alpha$  est]

$$+ \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} \quad \text{si} \quad \alpha \neq -1$$

$$+ \cancel{\ln |u|} \quad \text{si} \quad \alpha = -1$$

(Une primitive de  $g$  est  $G(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x$ )

en l'appliquant à  $u = \sin$  et  $\alpha = 1$ .

$$* \quad h(x) = - \underbrace{(-\sin x)}_{u'} \underbrace{(\cos x)^{-2}}_{u^{-2}}$$

$$\text{Une primitive de } h \text{ est} \quad H(x) = - \frac{1}{-2+1} u^{-2+1}$$

$$H(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$k(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{u'} \frac{(\sin x)^{-2}}{u^{-2}}$$

$k$  a pour primitive  $K(x) = \frac{1}{\sin x}$

$$l(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}} = \frac{\cos x}{u'} \frac{(2+\sin x)^{-\frac{1}{2}}}{u^{-\frac{1}{2}}}$$

$l$  a pour primitive  $L(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} u^{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{u}$

$$L(x) = 2\sqrt{2+\sin x}$$

$$m \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{u'}{u} \text{ pour } u = \cos x$$

$\tan x$  a pour primitive  $\ln |\cos x|$

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{u'}{u} \text{ pour } u = \sin x$$

$\frac{1}{\tan x}$  a pour primitive  $\ln |\sin x|$

### Ex 10

1) Rappel :  $\int_a^b f'(t) g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt$

~~Ex~~ Pour  $g(x) = x$   $f'(x) = \sin x$   
 $g'(x) = 1$   $f(x) = -\cos x$

$$\begin{aligned} I &= \left[ -x \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx \\ &= \pi + \left[ \sin x \right]_0^\pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

~~Ex~~ Pour  $g(x) = x$   $f'(x) = \cos 3x$   
 $g'(x) = 1$   $f(x) = \frac{1}{3} \sin 3x$

$$I = \left[ \frac{1}{3} x \sin 3x \right]_0^\pi - \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \left[ -\frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^\pi = \frac{1}{9} (-1 - 1) = -\frac{2}{9}$$

2)

$$\begin{aligned}
 K &= \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx \\
 &= \left[ -x^2 \cos x \right]_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx \\
 &= 0 - 0 + 2 \left[ x \sin x \right]_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \\
 &= 2 \times \frac{\pi}{2} - 0 + 2 \left[ \cos x \right]_0^{\pi/2}
 \end{aligned}$$

$$\underline{K = \pi - 2}$$

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = \sin x & g(x) = x^2 \\
 \text{avec } f'(x) = -\cos x & g'(x) = 2x
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \\
 &= \left[ -e^x \cos x \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx \\
 &= 0 - (-1) + \left[ e^x \sin x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \sin x \, dx \\
 L &= 1 + e^{\pi/2} - 0 - L \\
 2L &= 1 + e^{\pi/2} \\
 L &= \frac{1 + e^{\pi/2}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 g(x) = e^x & f'(x) = \sin x \\
 g'(x) = e^x & f(x) = -\cos x \\
 \text{avec } & \\
 g(x) = e^x & f'(x) = \cos x \\
 g'(x) = e^x & f(x) = \sin x
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx \\
 &= \left[ e^{2x} \sin x \right]_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x \, dx \quad \text{avec } \\
 &= e^{\pi} - 0 - 2 \left( \left[ -e^{2x} \cos x \right]_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x \, dx \right) \\
 &= e^{\pi} - 2 \left( 0 - (-1) + 2\Pi \right)
 \end{aligned}$$

$$\Pi = e^{\pi} - 2 - 4\Pi$$

$$\underline{\Pi = \frac{e^{\pi} - 2}{5}}$$

$$\begin{array}{ll}
 f'(x) = \cos x & g(x) = e^{2x} \\
 f(x) = \sin x & g'(x) = 2e^{2x}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 \underline{\text{Ex II}} & \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} & \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} & \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \\
 & \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6} & \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} & \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}
 \end{array}$$

## Ex 12

\*  $\arcsin$  est définie sur  $[-1, 1]$  donc  $D_g = [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

On utilise la dérivée d'une composité (cf rappels) :

$$g'(x) = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

\*  $\arccos$  est définie sur  $[-1, 1]$  donc  $x \mapsto \arccos(1-x)$  également.

Ainsi,  $D_g = [-1, 0] \cup [0, 1]$

On a  $(\arccos(1-x))' = -\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$   
donc

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \cdot x - \arccos(1-x)}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x(2-x)}} - \frac{\arccos(1-x)}{x^2}$$

\*  $x \mapsto \arctan x$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et  $\arctan x = 1 \Leftrightarrow x = \tan(1)$

donc  $D_h = \mathbb{R} \setminus \{\tan(1)\}$

$$h(x) = \frac{x(\arctan x - 1) + x}{1 - \arctan x} = -x + \frac{x}{1 - \arctan x}$$

donc

$$h'(x) = -1 + \frac{1 \cdot (1 - \arctan x) - x \cdot \frac{1}{1+x^2}}{(1 - \arctan x)^2}$$

$$h'(x) = -1 + \frac{1}{\arctan x} - \frac{x}{(1+x^2)(1-\arctan x)^2}$$

Remarque : Vous pouvez directement dériver  $h$ , en n'oubliant pas d'utiliser la dérivée du produit pour le numérateur. Il y a un peu plus de travail de dérivation à faire, mais c'est bien sûr juste.

Ex 13

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[ \arcsin x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$J = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[ \arctan x \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left( -\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Ex 14

$f$  est définie sur  $]-1, 1[$  et dérivable sur cet intervalle avec

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$f$  est donc une fonction constante sur  $]-1, 1[$ .

$$\begin{aligned} \text{Or, } f(0) &= \arccos(0) + \arctan(0) \\ &= \frac{\pi}{2} + 0 \end{aligned}$$

donc

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\pi}{2}$$


---