Département S.T.I.D. - IUT de Paris **2019-2020**
Option Mathématiques Avancées - S4

TD 2 - Nombres complexes

Exercice 1 On considère le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le point M de coordonnées $(x; y)$, et le nombre complexe $z = x + i\,y$. On dit que $\vec{u}$ est le *vecteur-image* et $M(x; y)$ le *point-image* du nombre complexe z. Et que z est l'*affixe* du vecteur $\vec{u}$ ou du point $M(x; y)$.

1. Soient $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, calculer $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Représenter dans un repère orthonormé (axes orthogonaux, même unité sur les 2 axes) les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Tracer les traits de construction de la méthode du parallélogramme.
2. Soient les points $M_1(3; 1), M_2(-1; 2)$ et le point M_3 tel que $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_3}$. Représenter ces trois points dans un autre repère orthonormé, d'origine $O(0; 0)$.
3. Soient les nombres complexes $z_1 = 3 + i, z_2 = -1 + 2\,i$, calculer $z_3 = z_1 + z_2$. Représenter ces trois nombres dans le plan complexe.

Exercice 2

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3 + 3i,\ z_2 = -1 - \sqrt{3}i,\ z_3 = -\frac{4}{3}i,\ z_4 = -2.$$

2. Calculer $(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^{2000}$.

Exercice 3 Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i} \quad ; \quad \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad ; \quad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ le nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$.

Exercice 4 Soit a un nombre réel.

1. Calculer le module du nombre complexe $z = \dfrac{1 + i\,a}{1 - i\,a}$ (1).
2. Démontrer que, réciproquement, pour tout nombre complexe z de module 1, il existe un unique nombre réel $a \geqslant 0$ tel que z peut s'écrire de manière unique sous la forme (1).

Exercice 5 Calculer $(1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$ et $(1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5$.

Exercice 6 Trouver les nombres complexes z dont le carré vaut :

(1) $-5 - 12\,i$ **(2)** $24 + 10\,i$ **(3)** i **(4)** $21 - 4\,i$ **(5)** $3\,e^{i\,\frac{\pi}{5}}$ **(6)** $\dfrac{1+i}{1-i}$ **(7)** $1 + \cos\theta \pm i\,\sin\theta$

Exercice 7

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $z^2 - 2\,z + 5 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\,z + 5 = 0$. Que peut-on dire des solutions de cette équation ? Les représenter dans le plan complexe.

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, représenter leurs solutions dans le plan complexe. Que peut-on dire des deux solutions de chaque équation ? Quelles sont leurs propriétés géométriques.

1. $z^2 + 1 = 0$.
2. $-z^2 + 8\ z - 20 = 0$.

Exercice 9

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3 - 2\ i)\ z + 5 - 5\ i = 0$.
2. Représenter les solutions de cette équation dans le plan complexe. Ont-elles les mêmes propriétés géométriques que les solutions des équations des exercices 7 et 8.

Exercice 10 Combien l'équation $z^6 = 1$ a t-elle de solutions ? Les donner sous la forme exponentielle.

Exercice 11 Trouver les racines complexes de l'équation $x^2 - 30x + 289 = 0$ (indication : $256 = 16^2$).

Exercice 12 On note $j = e^{\frac{2\pi}{3}}$.

1. Mettre j et j^2 sous forme algébrique (c'est-à-dire sous la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$).
2. Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$.

Exercice 13

1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $|1 + iz| = |1 - iz|$?
2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles.
3. Trouver alors les solutions.

Exercice 14

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout nombre $z \in \mathbb{C}$, on a :
$$(z - 1)\left(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}\right) = z^n - 1,$$
et en déduire que, si $z \neq 1$, on a :
$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}.$$
2. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(ix) - 1 = 2i \exp\left(\frac{ix}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ la somme :
$$Z_n = 1 + \exp(ix) + \exp(2ix) + \cdots + \exp((n-1)ix),$$
et en déduire les valeurs de
$$X_n = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos((n-1)x)$$
$$Y_n = \sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin((n-1)x).$$

Exercice 15 Soient A, B des points du plan d'affixes respectives les nombres complexes a, b. On suppose $a \neq b$. Quel est l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1$?

Exercice 16 Soit f la fonction de $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ vers $\mathbb{C}$ définie par
$$f(z) = \frac{z + i}{z - i}.$$

1. On suppose (dans cette question seulement) $z \in \mathbb{R}$. Quel est le module de $f(z)$?
2. Résoudre, dans $\mathbb{C}\backslash\{i\}$, l'équation $f(z) = z$.