TD 3 – Développements limités

Quelques développements limités usuels :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

Exercice 1
Soit f et g deux fonctions admettant les développements limités $f(x) = x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ et $g(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + o(x^3)$ au voisinage de 0.

1. Donner le développement limité de $f + g$ à l'ordre 3.
2. Donner le développement limité de $f \times g$ à l'ordre 3.
3. Donner le développement limité de $g \circ f(x) = g(f(x))$ à l'ordre 3.
4. Donner le développement limité de $\frac{f}{g}$ à l'ordre 3.

Exercice 2
Donner les limites des fonctions suivantes lorsque $x \to 0$:

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x^2}, \qquad g(x) = \frac{e^x - 1 - x - x^2}{\ln(1+x) - x}, \qquad h(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2 + x^2}{e^x - 1 - x - 3x^2}.$$

Exercice 3
Calculer les développements limités en 0 et à l'ordre indiqué :

$f_1(x) = e^x - (\cos x + \sin x)$	à l'ordre 4	$f_2(x) = \ln(1-x)$	à l'ordre 5
$f_3(x) = \cos^2 x$	à l'ordre 4	$f_4(x) = \frac{\sin x}{1+x}$	à l'ordre 4
$f_5(x) = \tan x$	à l'ordre 3	$f_6(x) = \frac{\cos x}{1+x-x^2}$	à l'ordre 4
$f_7(x) = e^{\sin x}$	à l'ordre 5	$f_8(x) = \ln(\cos x)$	à l'ordre 4

Exercice 4
Calculer les développements limités au point et à l'ordre indiqué :

$f_1(x) = \sqrt{x}$	à l'ordre 2 en 2	$f_2(x) = \frac{1}{\sin x}$	à l'ordre 4 en $\frac{\pi}{2}$
$f_3(x) = x^{\ln(x)}$	à l'ordre 2 en 1	$f_4(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x+1}$	à l'ordre 3 en $+\infty$

Exercice 5
Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x + x^5$.

1. Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection.
2. Prouver que f^{-1} est une fonction impaire : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$.
3. On admet que f^{-1} a des dérivées de tout ordre. Prouver qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$ quand $x \to 0$.
4. Calculer a, b, c en utilisant le fait que $f^{-1} \circ f(x) = x$.

Exercice 6
Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{x - 1}$ et $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} (\sin x)^{1/(2x-\pi)}$.

Exercice 7
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{(\ln(1+x)-x)\cos x}{x^2}$ pour $x \neq 0$.

1. Déterminer le DL à l'ordre 3 de f en 0.
2. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en 0.
3. Préciser la position relative de T et $\mathcal{C}$.

Exercice 8
Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \frac{x^2+2}{x+1}\exp(-\frac{1}{x})$ admet quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ une asymptote $\mathcal{D}$ dont on donnera une équation. Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.