# TD 3

## Ex 1

1. $(f+g)(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 6x^3 + o(x^3)$

2. $(fg)(x) = x + x^2 + x^3 + 2x(x+x^2+x^3) + 4x^2(x+x^2+x^3) + 5x^3(x+x^2+x^3) + o(x^3)$

$= x + x^2 + x^3 + 2x^2 + 2x^3 + 4x^3 + o(x^3)$

$= x + 3x^2 + 7x^3 + o(x^3)$

3. $g(f(x)) = 1 + 2(x+x^2+x^3) + 4(x+x^2+x^3)^2 + 5(x+x^2+x^3)^3 + o(x^3)$

$= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 4(x^2 + 2x^3) + 5x^3 + o(x^3)$

$= 1 + 2x + 6x^2 + 15x^3 + o(x^3)$

4.

$$
\begin{array}{r|l}
x + x^2 + x^3 & 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 \\
\cline{2-2}
-(x + 2x^2 + 4x^3) & x - x^2 - x^3 \\
\hline
-x^2 - 3x^3 & \\
-(-x^2 - 2x^3) & \\
\hline
-x^3 &
\end{array}
$$

$\frac{f}{g}(x) = x - x^2 - x^3 + o(x^3)$

## Ex 2

1. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1)$ donc $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$

2. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $\qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$e^x - 1 - x - x^2 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $\qquad \ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\frac{e^x - 1 - x - x^2}{\ln(1+x) - x} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)}$$

donc $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2}{\ln(1+x) - x} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1$

3. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ $\qquad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} - x^2 = -\frac{9}{8}x^2 + o(x^2)$ $\qquad e^x - 1 - x - 3x^2 = -\frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$

donc $h(x) = \dfrac{-\frac{9}{8}x^2 + o(x^2)}{-\frac{5}{2}x^2 + o(x^2)} = \dfrac{-\frac{9}{8} + o(1)}{-\frac{5}{2} + o(1)} = \dfrac{9 + o(1)}{40 + o(1)}$

d'où $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} - x^2}{e^x - 1 - x - 3x^2} = \dfrac{9}{40}$

## Ex 3

1. $f_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^4)$

$= x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

2. $f_2(x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)$

3. $f_3(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^4)$

$= 1 - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{x^4}{24} + \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4)$

$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

4. $f_4(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)\right)$

$= x - x^2 + x^3 - x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$

$= x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$

5. $f_5(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

7. $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \frac{y^5}{120} + o(y^5)$

donc $f_7(x) = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^3$

$+ \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^4 + \frac{1}{120}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^5 + o(x^5)$

$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{1}{2}\left(x^2 - 2\frac{x^4}{6}\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 - 3 \cdot \frac{x^5}{6}\right) + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$

$$f_7(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{24}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$$

6.

$$\begin{array}{l|l}
1 \quad - \frac{x^2}{2} \quad + \frac{x^4}{24} & 1+x-x^2 \\ \cline{2-2}
-(1 + x - x^2) & 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{37}{24}x^4 \\ \cline{1-1}
\quad -x + \frac{x^2}{2} \quad + \frac{x^4}{24} & \\
-(-x - x^2 + x^3) & \\ \cline{1-1}
\quad \frac{3}{2}x^2 - x^3 + \frac{x^4}{24} & \\
-\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^4\right) & \\ \cline{1-1}
\quad -\frac{5}{2}x^3 + \frac{37}{24}x^4 & \\
-\left(-\frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^4\right) & \\ \cline{1-1}
\quad \frac{97}{24}x^4 &
\end{array}$$

$$f_6(x) = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{97}{24}x^4 + o(x^4)$$

8. $\ln(1+y) = 1 - y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + o(y^4)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

donc $f_8(x) = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4)$

$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$

$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

## Ex 4

1. On pose $y = x - 2$

$\sqrt{x} = \sqrt{2+y} = \sqrt{2}\sqrt{1+y/2} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{y/2}{2} - \frac{(y/2)^2}{8} + o(y^2)\right)$

donc $\sqrt{x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}y - \frac{\sqrt{2}}{32}y^2 + o(y^2)$

$\sqrt{x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + o\left((x-2)^2\right)$

2. On pose $y = x - \frac{\pi}{2}$

Alors $\sin x = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \cos y$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{1 - \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{24} + o(y^4)\right)}$$

$$= 1 + \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{24}\right) + \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{24}\right)^2 + o(y^4)$$

$$= 1 + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{24} + \frac{y^4}{4} + o(y^4)$$

$$= 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{5}{24} y^4 + o(y^4)$$

$$\frac{1}{\sin x} = 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{5}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right)$$

3. On pose $y = x - 1$

$$x^{\ln x} = e^{\ln x . \ln x} = e^{(\ln x)^2} = e^{(\ln(1+y))^2}$$

Or, $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$

donc $(\ln(1+y))^2 = y^2 + o(y^2)$

Comme $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + o(z^2)$,

$$e^{(\ln(1+y))^2} = 1 + y^2 + o(y^2)$$

donc $x^{\ln x} = 1 + (x-1)^2 + o((x-1)^2)$

4. On pose $y = \frac{1}{x}$

$$f_4(x) = \frac{\frac{1}{y^2} + 1}{\frac{1}{y^3} - \frac{1}{y} + 1} = \frac{y + y^3}{1 - y^2 + y^3}$$

$$\begin{array}{l|l} y + y^3 & 1 - y^2 + y^3 \\ -(y - y^3) & y + 2y^3 \\ \hline 2y^3 & \end{array}$$

Donc $f_4(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

Ex 5

a) $f'(x) = 1 + x^4 > 0$. donc $f$ est strictement croissante.

c'est donc une bijection. Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,

$f$ est bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

b) $f$ est une fonction impaire : $f(-y) = -f(y)$ $\forall y$.

En particulier, pour $y = f^{-1}(x)$, on obtient

$$f(-f^{-1}(x)) = -f(f^{-1}(x))$$

$$f(-f^{-1}(x)) = -x$$

En appliquant $f^{-1}$ aux deux côtés, $-f^{-1}(x) = f^{-1}(-x)$.

$f^{-1}$ est donc impaire.

c) Admis (en fait, les DL des fonctions impaires n'ont que des puissances impaires, idem pour les fonctions paires qui n'ont que des puissances paires).

d) $f^{-1}(f(x)) = x$

entraine $a(x+x^5) + b(x+x^5)^3 + c(x+x^5)^5 + o(x^5) = x$

$$ax + bx^3 + (a+c)x^5 + o(x^5) = x + o(x^5)$$

Or, deux DL sont égaux ~~si et~~ seulement si les coefficient sont égaux donc

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

d'où $f^{-1}(x) = x - x^5 + o(x^5)$

Ex 6 :

1. Cherchons un DL d'ordre 2 de $f(x)$ en 1.

On pose $y = x-1$. Alors

$$x^x - x = (1+y)^{1+y} - 1 - y$$
$$= e^{(1+y)\ln(1+y)} - 1 - y$$

Or, $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$

$$(1+y)\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + y^2 + o(y^2)$$
$$= y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

$$e^{(1+y)\ln(1+y)} = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\left(y + \frac{y^2}{2}\right)^2 + o(y^2)$$
$$= 1 + y + y^2 + o(y^2)$$

$$e^{(1+y)\ln(1+y)} - 1 - y = y^2 + o(y^2)$$

d'où $\quad x^x - x = (x-1)^2 + o((x-1)^2)$

puis $\quad \dfrac{x^x - x}{x-1} = x - 1 + o((x-1))$

donc $\quad \displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^x - x}{x-1} = 0.$

2. Posons $y = x - \frac{\pi}{2}$.

$$(\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}} = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2y}} = (\cos y)^{\frac{1}{2y}} = e^{\frac{1}{2y}\ln(\cos y)}$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

donc $\ln(\cos y) = -\frac{y^2}{2} + o(y^2)$

$$\frac{1}{2y}\ln(\cos y) = -\frac{y}{2} + o(y)$$

$$e^{\frac{1}{2y}\ln(\cos y)} = 1 - \frac{y}{2} + o(y) \qquad \text{donc} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}} = 1$$

## Ex 7

1. Pour avoir un DL à l'ordre 3 de $f$, il faut un DL à l'ordre 5 du numérateur.

Or,
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

donc
$$(\ln(1+x) - x)\cos x = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^5)$$
$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^5}{6} + o(x^5)$$
$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{30} + o(x^5)$$

d'où
$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{30} + o(x^3)$$

2. La tangente en 0 à $\mathcal{C}$ est d'équation $y = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$

3. Le terme suivant est toujours négatif, ce qui implique que $f$ est sous sa tangente : $\mathcal{C}$ est en-dessous de $T$

## Ex 8

On pose $z = \frac{1}{x}$

Alors
$$\frac{x^2+2}{x+1} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{z^2}+2}{\frac{1}{z}+1} e^{-z} = \frac{1+2z^2}{z+z^2} e^{-z}$$
$$\frac{x^2+2}{x+1} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{z} \frac{1+2z^2}{1+z} e^{-z}$$

Or,
$$\frac{1+2z^2}{1+z} e^{-z} = (1+2z^2)(1-z+z^2)\left(1-z+\frac{z^2}{2}\right) + o(z^2)$$
$$= (1-z+z^2+2z^2)\left(1-z+\frac{z^2}{2}\right) + o(z^2)$$
$$= (1-z+3z^2)\left(1-z+\frac{z^2}{2}\right) + o(z^2)$$
$$= 1-z+3z^2-z+z^2+\frac{z^2}{2} + o(z^2)$$
$$= 1-2z+\frac{9}{2}z^2 + o(z^2)$$

d'où
$$\frac{x^2+2}{x+1} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{z} - 2 + \frac{9}{2}z + o(z)$$
$$= x - 2 + \frac{9}{2}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\mathcal{C}$ admet donc la droite d'équation $y = x - 2$ comme asymptote en $+\infty$ et $-\infty$. En $+\infty$, $\frac{9}{2}\frac{1}{x} > 0$ donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$.
En $-\infty$, $\mathcal{C}$ est en-dessous de $\mathcal{D}$.