TD 10 : Équation des ondes

Exercice 1. (Énergie discrète). Pour $\theta \in [0, 1/2]$, on considère le θ-schéma centré avec conditions aux bord périodiques, donné par

$$u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1} + \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} A(\theta u^{n+1} + (1-2\theta)u^n + \theta u^{n-1}) = 0,$$

avec la convention $u_0^n = u_{N+1}^n$ pour tout $n \geqslant 0$, et où A est la matrice du Laplacien discret (périodique),

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On définit l'énergie discrète

$$E^{n+1} = \left\| \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right\|^2 + \frac{1}{(\Delta x)^2} \big(Gu^{n+1}, Gu^n\big) + \frac{\theta}{(\Delta x)^2} \big\| G(u^{n+1} - u^n) \big\|^2$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{N+1}$, $\|.\|$ la norme associée, et G est la matrice du gradient scalaire, $(Gu)_i = u_{i+1} - u_i$ (où on rappelle la convention $u_{N+1} = u_0$).

1. En supposant que u est de classe C^4, vérifier que l'énergie discrète (multipliée par le pas d'espace) est une approximation à l'ordre 1 en temps et en espace de l'énergie au temps t^{n+1},
$$E(t^{n+1}) = \int_0^1 u_t^2 + u_x^2.$$
2. Montrer que pour tout $u, v \in \mathbb{R}^{N+1}$,
$$(Gu, Gv) = (u, Av).$$
3. En déduire que $E^{n+1} - E^n = 0$, c'est-à-dire que l'énergie discrète est conservée.
4. Peut-on en déduire la stabilité L^2 du schéma numérique ?
5. Dans un premier temps, montrer que l'inégalité de Poincaré discrète suivante est vérifiée : pour tout $u \in \mathbb{R}^{N+1}$,
$$\|Gu\| \geqslant 4\sin^2(\pi \Delta x) \|u - \bar{u}\|,$$
où $\Delta x = 1/(N+1)$ et u désigne la valeur moyenne de u,
$$\bar{u} = \frac{1}{N+1} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} u.$$
6. Dans un second temps, montrer que pour tout $v, w \in \mathbb{R}^{N+1}$,
$$(w, v) + \theta \|w - v\|^2 \geqslant \left(1 - \frac{1}{4\theta}\right) \|w\|^2.$$
7. En déduire la stabilité inconditionnelle du schéma lorsque $\theta \in]1/4, 1/2]$, et en supposant que les conditions initiales vérifient $\bar{u}^0 = \bar{u}^1$.

Exercice 2. (Le cas le plus simple) On considère l'équation des ondes homogène

$$\partial_{tt} u - \partial_{xx} u = 0$$

sur $t > 0$ et $x \in [0, 1]$, avec conditions de Dirichlet homogènes.

1. Résoudre l'équation des ondes avec conditions initiales :

$$u(0, x) = 0, \quad \partial_t u(0, x) = 2k\pi \sin(2k\pi x).$$

2. Implémenter le θ-schéma centré, et mettre en évidence l'ordre de consistance du schéma.
3. Vérifier que l'énergie discrète est constante.

Exercice 3. Dans cet exercice, on considère l'équation des ondes non homogène sur $t > 0$ et $x \in [0, 1]$,

$$\partial_{tt} u - \partial_{xx} u = f(u).$$

1. Adapter le schéma centré pour cette équation avec $f(u) = \sin(u)$ et avec conditions de Dirichlet homogènes.
2. Adapter le schéma centré pour l'équation des ondes avec $f(u) = 0$ et avec conditions de Dirichlet données par

$$u(0, t) = \sin(2\pi t), \quad u(t, 1) = 0.$$

   On prendra comme conditions initiales :

$$u(0, x) = 0, \quad \partial_t u(0, x) = 2\pi(1 - x).$$