Résolution de systèmes non linéaires

Exercice 1. (Dichotomie)

1. Programmer la méthode de dichotomie pour trouver votre nombre irrationnel préféré.
2. Afficher les résultats
3. Pour une erreur initiale inférieure à $1/2$, combien faut-il d'itérations pour arriver à une erreur de 10^{-4} ? Comparer avec une méthode quadratique.

Exercice 2. (Méthode de Héron) Soit $a > 0$. On cherche à approximer $\alpha = \sqrt{a}$. Le but est de construire une suite de rectangles $(R_n)_n$ d'aire a se rapprochant du carré de côté α.

1. Partant de x_0 qui est une approximation grossière de α, quelle est la longueur y_0 de l'autre côté du rectangle R_0 ?
2. On pose $x_1 = \frac{x_0+y_0}{2}$, et on recommence... définir alors les suites récurrentes $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$.
3. Cette méthode converge-t-elle ?
4. Reprendre la question précédente avec
$$x_{n+1} = -\frac{x_n^2}{a^2} + x_n + \frac{1}{a}.$$
Pour $a = 2$, montrer que si $x_0 \in [1, 2]$, la méthode de point fixe converge.

Exercice 3. Dans cet exercice, on va comparer la méthode de Newton et celle de la sécante appliquées aux fonctions
$$f(x) = \cos(2x)^2 - x^2, \quad g(x) = \frac{x(63x^4 - 70x^2 + 15)}{8},$$
autour des zéros 0.515... (pour f) et 0.538... (pour g).

1. Programmer la méthode de Newton.
2. Programmer la méthode de la sécante.
3. Programmer une méthode de visualisation de l'ordre de ces deux méthodes.

Exercice 4. (Méthode de la sécante : ordre de convergence) Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\bar{x}$ un zéro simple de f. Soit I un voisinage de $\bar{x}$ tel que $|f'| \geqslant m > 0$ sur I, et soient $M = \max_I |f''|$ et $J =]\bar{x} - \beta, \bar{x} + \beta[$, tel que $0 < \frac{2M}{m}\beta < 1$.

1. Montrer que si $(x_0, x_1) \in J^2$, la suite définie par :
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$
converge vers $\bar{x}$ avec $|\bar{x} - x_{k+1}| \leqslant C|\bar{x} - x_k||\bar{x} - x_{k-1}|$.
2. Montrer de plus que l'ordre de la convergence est au moins $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3. Comment pourrait-on généraliser la méthode de la sécante en dimension supérieure à 1 ? (cela s'appelle en fait la méthode de Broyden)

Exercice 5. (Convergence locale de la méthode de Newton) On se place dans $\mathbb{C}$, dans le carré $[-1, 1]^2$. On cherche à approximer les racines cubiques de l'unité par la méthode de Newton. Quadrillez le carré suivant un petit pas de discrétisation et pour chaque case :

— Résolvez $z^3 = 1$ par la méthode de Newton en partant du centre de la case.
— Coloriez la case dans une couleur différente suivant que la méthode converge vers 1, j ou $\bar{j}$...
— Que remarquez-vous ?

Exercice 6. Soit $a > 0$. On cherche à calculer $1/a$.

1. Montrer qu'une méthode de Newton (pour une fonction auxiliaire bien choisie) peut s'écrire :
$$x_0 \in \mathbb{R},\ x_{n+1} = x_n(2 - ax_n).$$
2. Trouver les x_0 tel que la suite (x_n) converge vers $\frac{1}{a}$.

Exercice 7. (Racines d'un polynôme) Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 2$ à coefficients réels admettant n racines réelles distinctes $\zeta_n < \zeta_{n-1} < \cdots < \zeta_1$. Montrer qu'une méthode de Newton initialisée à $x_0 > x_1$ converge quadratiquement.

Exercice 8. (Recherche de vecteur propre) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique possédant une valeur propre μ. Soit v un vecteur propre associé à μ de norme $\|v\|_2 = 1$.

1. Mettre le problème sous la forme $F(v, \mu) = 0$.
2. Calculer ∇F. À quelle condition la méthode de Newton converge-t-elle localement quadratiquement ?

Exercice 9. (Recherche de racine carrée de matrice) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible et $F : X \mapsto X^2 - A$ définie sur $M_n(\mathbb{C})$.

1. Écrire l'algorithme de Newton pour F.
2. Soit T une matrice triangulaire supérieure vérifiant :
$$\forall j \neq k,\ T_{jj} + T_{kk} \neq 0.$$
Montrer que pour $C \in M_n(\mathbb{C})$ donné, l'équation $TH + HT = C$ admet une unique solution. On montrera que le système obtenu est triangulaire sous réserve d'une bonne numérotation des H_{ij}, $i, j \in [\![1, n]\!]$.
3. Supposons (ou exercice, montrez-le) que A admette une racine carrée B vérifiant :
$$\forall j \neq k,\ B_{jj} + B_{kk} \neq 0.$$
Montrer alors que l'algorithme de Newton converge localement autour de B.
4. Comment mettriez-vous en place pratiquement un tel algorithme ?

Exercice 10. (Accélération d'Aitken) Soit $(u_n)_n$ une suite réelle convergent vers l vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, l \neq u_n \neq u_{n-1},\ \text{et}\ \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - l}{u_{n-1} - l} = \lambda \in]-1, 1[\backslash\{0\}.$$
On cherche à améliorer la convergence de u_n.

1. Montrer que λ_n définie par
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}$$
converge vers λ.
2. Montrer que la suite $(v_n)_n$ définie par :
$$\forall n \text{ assez grand},\ v_n = \frac{u_{n+1} - \lambda_n u_n}{1 - \lambda_n}$$
vérifie $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n - l}{u_n - l} = 0$. Conclure.
3. Pourquoi cette méthode s'appelle-t-elle Δ^2 (on réécrira v_n sous forme de différences de u_n) ?

Cette méthode est due à Aitken (1926).

4. Décrire la suite d'Aitken d'une suite arithmético-géométrique.
5. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ de classe C^2 vérifiant $\|f'\|_\infty < 1$. f a alors un unique point fixe (pourquoi ?) l. Si on suppose $f'(l) \neq 0$, la convergence de la méthode de point fixe est linéaire de rapport $|f'(l)|$. Montrer que si $f''(l) \neq 0$, alors la suite accélérée d'Aitken converge aussi linéairement mais de rapport $f'(l)^2$. *Indication :* En notant $e_n = u_n - l$, on montrera en particulier que
$$v_n - l = \frac{f'(l)f''(l) + o(1)}{2(f'(l) - 1) + +o(1)} e_{n-1}^2$$

Remarque : Il existe bien sûr d'autres méthodes d'accélération. On pourra regarder les méthodes de Steffensen ou Richardson.

Exercice 11. (Méthode des approximations successives de Picard)

1. Coder une routine qui, à partir d'un vecteur de valeurs d'une fonction $(f(i/n))_{i\in[\![0,n]\!]}$, renvoit la valeur approchée de l'intégrale de f sur $[0, 1]$, en pensant par exemple à l'intégration de Riemann.
2. Implémenter la méthode de Picard pour résoudre le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = \cos(y) \quad \text{pour } x \in (0, 1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
et comparer les itérations successives avec la solution explicite, $y(x) = 2 \arctan(\tanh(x/2))$.