# TD 4 : Intégration numérique

**Exercice 1.** (Autour de Newton-Cotes) On rappelle la méthode de Newton-Cotes de rang $k$, dans le cas où l'intervalle est subdivisé en $n$ sous-intervalles de même taille :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \omega_j f(x_{ij}),$$

où

$$x_{ij} = a + \left(i + \frac{j}{k}\right)\frac{b-a}{n}, \quad \omega_j = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} L_j(u)du = \int_{-1}^{1} \prod_{i\neq j} \frac{u-u_i}{u_j-u_i}du, \quad u_j = -1 + 2\frac{j}{k}.$$

1. Montrer que $\omega_j = \omega_{k-j}$ pour tout $j \in [\![0,k]\!]$.
2. Déterminer les coefficients $\omega_j$ intervenant dans la méthode de Newton-Cotes d'ordre 1, 2, et 4 (à la main, ou numériquement).
3. Implémenter ces trois méthodes de Newton-Cotes dans une seule et même fonction, qui prend en entrée une fonction $f$, le rang de la méthode $k$, l'intervalle d'intégration $[a,b]$ et un entier $n$ correspondant au pas de la subdivision $h = (b-a)/n$.
4. Comparer la convergence de ces méthodes graphiquement.

**Exercice 2.** (Méthode de Gauss-Legendre) On s'intéresse à la méthode de Gauss pour l'intégration sur l'intervalle $[-1,1]$ avec le poids $\omega \equiv 1$.

1. Déterminer les quatre premiers polynômes orthogonaux unitaires de $L^2([-1,1])$.
2. Décrire les méthodes de quadrature élémentaires associées, d'ordre respectivement 1, 3 et 5.
3. Les implémenter, et comparer la vitesse de convergence avec les méthodes de l'exercice précédent.

**Exercice 3.** (Estimation de l'erreur) Dans cet exercice, on considère une méthode de quadrature élémentaire définie par les points $(\xi_j)_{0\leqslant j\leqslant l} \subset [a,b]$ et les poids $(\omega_j)_{0\leqslant j\leqslant l}$. On suppose que la méthode est d'ordre $N > 0$, et on considère l'erreur

$$E(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx - (b-a)\sum_{j=0}^{l} \omega_j f(\xi_j).$$

1. En supposant que $f \in \mathcal{C}^{N+1}$, montrer que

$$E(f) = \frac{1}{N!}\int_a^b k_N(t) f^{N+1}(t)dt,$$

   où le noyau de Péano $k_N(t) = E\big(x \mapsto (x-t)_+^N\big)$, et $y_+ = \max(y,0)$ désigne la partie positive (*Indication :* utiliser un développement de Taylor avec reste intégral).
2. (Lemme de la moyenne) Soit $\eta : ]a,b[ \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable et positive, et $g$ une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $\xi \in ]a,b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = f(\xi)\int_a^b \eta(x)dx.$$

3. On suppose que le noyau de Péano $k_N \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $\xi \in ]a,b[$ tel que

$$E(f) = \frac{f^{N+1}(\xi)}{N!}\int_a^b k_N(t)dt = \frac{f^{N+1}(\xi)}{(N+1)!}E\big(x \mapsto x^{N+1}\big).$$

   Il s'avère que pour la méthode de Newton-Cotes de tout rang, le noyau de Péano est de signe constant : c'est le théorème de Steffensen. On l'admettra dans la suite.

4. (Exemple) Calculer le noyau de Péano de la méthode du point milieu, $\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq 2f(0)$, et en déduire que $E(f) = f''(\xi)/3$ pour un certain $\xi \in ]-1, 1[$.

Dans la suite de l'exercice, on considère une méthode de quadrature composée sur $[a, b]$, pour le poids $\omega \equiv 1$, construite à partir d'une unique méthode élémentaire

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq 2\sum_{j=0}^{l} \omega_j f(x_j),$$

d'ordre $N$, et de noyau de Péano $k_N$. Pour le choix d'une subdivision $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = b$, l'erreur de la méthode composée s'écrit donc

$$E_{\text{comp}} = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{k-1} h_i \sum_{j=0}^{l} \omega_j f(\xi_{ij}), \quad \text{où} \quad \xi_{ij} = \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} + x_j h_i, \quad h_i = \alpha_{i+1} - \alpha_i.$$

5. Montrer que le noyau de Péano de la méthode composée $K_N$ s'écrit

$$t \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}], \quad K_N(t) = \left(\frac{h_i}{2}\right)^{N+1} k_N\left(\frac{2}{h_i}\left(t - \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}\right)\right).$$

6. On suppose que $k_N$ est de signe constant, et que que tous les $h_i$ sont égaux à $h$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^{N+1}$, alors il existe $\xi \in ]a, b[$ tel que

$$E_{\text{comp}}(f) = (b-a)\frac{h^{N+1}C_N}{N!2^{N+2}} f^{(N+1)}(\xi), \quad \text{où} \quad C_N = \int_{-1}^{1} k_N(t)dt.$$

7. (Application) On admet que le noyau de Péano de la méthode (élémentaire) de Simpson sur $[-1, 1]$ est $k_3(t) = -\frac{1}{12}(1-|t|)^3(1+3|t|)$. En déduire une estimation de la méthode de Simpson composée.