TD 6 : Résolution d'équations différentielles ordinaires

1 Résolutions explicites

Exercice 1. (Quelques résolutions explicites de systèmes non-linéaires) On se donne a, b et $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues.

1. Résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$:
$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t).$$
2. Équation de Bernoulli : en étudiant le changement de variable $z = y^{1-\alpha}$, résoudre l'équation suivante sur $\mathbb{R}$:
$$y'(t) = a(t)y(t)^{\alpha} + b(t)y(t).$$
3. Équation de Ricatti : supposons que l'on connaisse une solution particulière de
$$y'(t) = a(t)y(t)^2 + b(t)y(t) + c(t)$$
et supposons que y_2 en soit une autre. De quelle EDO $y_2 - y_1$ est-elle solution ?

Exercice 2. (D'autres résolutions explicites) Résoudre les problèmes de Cauchy suivant :

1. Sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$y'(t) = \frac{1}{2}y^3(t) - \frac{1}{2t}y(t),\ y(1) = 1.$$
2. Sur $\mathbb{R}$:
$$(1 + t^2)y'(t) - ty(t) = 1 + t^2,\ y(0) = 1.$$

2 Méthodes numériques

On rappelle les schémas basiques pour résoudre l'EDO $y' = f(t, y)$:

— Euler explicite : $y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)$
— Euler implicite : $y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})$
— Crank-Nicholson : $y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{2}(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}))$
— Tableaux des méthodes de Runge-Kutta :

Heun :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Runge-Kutta 2 :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Runge-Kutta 4 :

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

Exercice 3. (Erreur de consistance) Dans tout l'exercice, on étudie l'équation différentielle ordinaire $y' = f(t, y)$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que le schéma d'Euler explicite (i.e. Runge-Kutta 1) est consistant d'ordre 1.
2. Montrer que le schéma de Runge-Kutta 2 est consistant d'ordre 2.
3. Montrer que le schéma de Heun est consistant d'ordre 2.

Exercice 4. (Mise en œuvre) Programmer (en dimension 1) les schémas numériques classiques (Runge-Kutta 1, 2 et si vous êtes motivés 4, Heun, Euler explicite, implicite et Crank-Nicholson). On pensera à tester ces schémas sur une EDO dont on connaît une solution exacte. Illustrer l'erreur faite par ces schémas en fonction du pas de discrétisation.

Remarque : on pourra aussi penser à utiliser le module `integrate` de `scipy` qui contient plein de routines très pratiques ! On rappelle que dans le programme de l'agrégation figure explicitement l'« utilisation de méthodes d'ordre élevé via les routines proposées par les logiciels ».

Exercice 5. (Champs de vecteurs) Écrire une matrice qui prend une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ en entrée et renvoie le champ des vitesses de l'EDO autonome $y' = Ay$. On pourra utiliser la fonction `quiver` de `matplotlib`.

Exercice 6. (Problèmes raides) On va s'intéresser dans cet exercice à la notion de *problèmes raides* intervenant dans plusieurs configurations

1. On considère dans un premier temps le système
$$y'(t) = -\lambda y(t) + c,\ y(0) = 1$$
   (a) Donner la solution de ce système ainsi que son point d'équilibre l.
   (b) On note x^n la suite donnée par une discrétisation de cette EDO par l'algorithme d'Euler explicite pour un pas de temps Δt. Donner une expression de x^n.
   (c) Commenter en fonction des valeurs de λ et Δt.
   (d) Reprendre les deux questions précédentes avec le schéma d'Euler implicite.

   Quand λ est grand, on dit que le problème est *raide*. Les problèmes raides interviennent dans beaucoup de domaines et font souvent intervenir des dynamiques ayant des temps caractéristiques très petits ou grands.
2. Historiquement, ce genre de problème est apparu dans des équations du type :
$$y'(t) = \frac{-y(t) + \cos(t)}{\varepsilon}.$$
   (a) Donner les solutions explicites de cette équation différentielle.
   (b) Donner la suite y^n générée par une discrétisation de cette EDO de type Euler explicite jusqu'à l'ordre $O(\varepsilon\Delta t)$ (*Indication :* chercher une solution de la forme $y^n = (1 - \Delta t/\varepsilon)^n(y^0 - A) + A\cos(n\Delta t) + B\sin(n\Delta t)$)
   (c) Que remarque-t-on pour ε petit ? (*Indication :* on peut montrer que $A = 1 + O(\varepsilon\Delta t)$ et $B = \varepsilon + O(\varepsilon\Delta t)$).
3. Un autre domaine courant est celui de la cinétique chimique. En effet, lorsque l'on mélange plusieurs réactifs, certaines réactions peuvent se faire largement plus rapidement que d'autres, ce qui va se traduire par des constantes avec différents ordre de grandeurs. On considère par exemple le système d'équations :
$$\begin{cases} x' = -k_1 x + k_3 yz \\ y' = k_1 x - k_3 yz - k_2 y^2 \\ z' = k_2 y^2 \end{cases} \text{avec } x(0) = 1,\ y(0) = z(0) = 0,$$
   modélisant les évolutions de concentrations de trois réactifs. On pose $k_1 = 0.04$, $k_2 = 10^7$ et $k_3 = 10^4$.
   (a) Tester sur ce système les méthodes d'Euler explicite et Runge-Kutta 4 jusqu'au temps $T = 0.5$ pour différents pas de temps.
   (b) Tester sur ce système la méthode d'Euler implicite jusqu'au temps $T = 0.5$.

Exercice 7. (Un schéma d'Euler modifié) On s'intéresse à l'équation différentielle $y' = \alpha y(1-y)$ munie d'une donnée initiale $y_0 \in]0,1[$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution maximale sur $\mathbb{R}_+$, qu'elle est définie sur $\mathbb{R}_+$ tout entier et qu'elle reste comprise entre 0 et 1.
2. On note $(y_n)_n$ la suite donnée par le schéma d'Euler explicite de pas de temps Δt. Montrer que si $\alpha\Delta t \leqslant 1$, alors $y_n \in]0,1[$ pour tout n.
3. Montrer que si $\alpha\Delta t > 1$, il existe une donnée initiale y_0 telle que $y_1 > 1$. En quoi cela est-ce un problème ?
4. On regarde maintenant un schéma d'Euler modifié :
$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \alpha y_n (1 - y_{n+1}).$$
Montrer que ce schéma est convergent, puis que $y_n \in]0,1[$ pour tout n, inconditionnellement sur α, Δt, y_0.

3 De la modélisation

Exercice 8. (Lotka-Volterra) On considère le système proie-prédateur suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

muni d'une condition initiale de Cauchy : $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ avec $x_0, y_0 > 0$ et $a, b, c, d > 0$.

1. Expliquer la modélisation et montrer que le problème admet une unique solution maximale (X, Y) sur un intervalle $[0, T[$ (T pouvant être infini). Montrer que X et Y restent strictement positives.
2. Montrer que la fonction
$$\begin{array}{rccl} H : & (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & dz_1 - c\log(z_1) + bz_2 - a\log(z_2) \end{array}$$
est une intégrale première du système, i.e. que $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0$ si $(x(t), y(t))$ est une solution. En déduire que X et Y sont bornées et que $T = +\infty$.
3. Quels sont les point d'équilibre du champ ? Quelle est leur stabilité ? *Indication :* Pour un point d'équilibre (α, β), on pourra utiliser la fonction de Lyapounov suivante :
$$\begin{array}{rccl} \phi : & (\mathbb{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & H(z_1, z_2) - H(\alpha, \beta) \end{array}$$
4. Tracer le champ des vitesses. Que remarque-t-on ?
5. Montrer que les solutions du système sont périodiques. *Indication :* découper $(\mathbb{R}_+^*)^2$ en quatre parties bien choisies. On peut supposer sans perdre de généralité que $(x_0, y_0) \in A =]0, \alpha[\times]0, \beta[$. Montrer alors que l'on sort de A au temps t_1, que l'on visite chacune des parties successivement, que l'on re-rentre dans A et que l'on en ressort au temps t_2. Utiliser l'intégrale première H pour conclure.
6. Si $\bar{T}$ est une période des solutions, montrer que les moyennes de X et Y sur $[0, \bar{T}]$ sont α et β.
7. On va maintenant chercher à calculer $\bar{T}$. On se fixe des paramètres a, b, c, d, un point de départ initial, un temps T^* ainsi qu'un pas de discrétisation pour toute la question.
   (a) Programmer différentes méthodes (Euler explicite, implicite, Runge-Kutta 4, Crank-Nicholson) pour ce problème

(b) Tracer les représentations graphiques des solutions approchées dans l'espace des phases. Que remarque-t-on ?
(c) Donner une approximation de $\bar{T}$ donnée par ces différentes méthodes
(d) Tracer les valeurs de l'intégrale première associée aux solutions approchées. Que remarque-t-on ?
(e) Que se passe-t-il pour les méthodes les plus précises si on augmente T^* ?

8. On considère le système de Lotka-Volterra linéarisé autour de son point d'équilibre (α, β).
   (a) Expliciter ce système linéarisé et en trouver une intégrale première $\tilde{H}$.
   (b) Considérons les schémas d'Euler explicite, d'Euler implicite, et de Crank-Nicholson. Exprimer $\tilde{H}(x_{k+1}, y_{k+1})$ en fonction de $\tilde{H}(x_k, y_k)$.
   (c) Quelle méthode permet le mieux de conserver l'intégrale première $\tilde{H}$?

Exercice 9. (Euler-Lagrange) On va s'intéresser à l'optimisation de la fonctionnelle suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{L} : & \mathcal{C}^1_*([a,b],\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & q & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b L(s, q(s), q'(s))ds \end{array},$$

avec $L : (t, x, v) \mapsto L(t, x, v)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^1_*([a,b],\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions q de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $q(a) = q_a$, $q(b) = q_b$ avec q_a, q_b des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ fixés. On introduit la notation de différentielle directionnelle suivante :

$$\forall q \in \mathcal{C}^1_*([a,b],\mathbb{R}^n),\ \forall w \in \mathcal{C}^1_0([a,b],\mathbb{R}^n),\ D\mathcal{L}(q)(w) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{L}(q + \varepsilon w) - \mathcal{L}(q)}{\varepsilon}$$

et on dit que q est un point critique de $\mathcal{L}$ si et seulement si pour tout $w \in \mathcal{C}^1_0([a,b],\mathbb{R}^n)$, $D\mathcal{L}(q)(w) = 0$.

1. Montrer que $\forall q \in \mathcal{C}^1_*([a,b],\mathbb{R}^n),\ \forall w \in \mathcal{C}^1_0([a,b],\mathbb{R}^n)$,
$$D\mathcal{L}(q)(w) = \int_a^b \partial_x L(s, q(s), q'(s)) \cdot w(s) + \partial_v L(s, q(s), q'(s)) \cdot w'(s)ds.$$
2. Montrer que q est un point critique de $\mathcal{L}$ si et seulement si c'est une solution de l'équation d'Euler Lagrange :
$$\frac{d}{dt}\left(\partial_v L(t, q(t), q'(t))\right) = \partial_x L(t, q(t), q'(t))$$
3. Montrer que si q est une solution $\mathcal{C}^2$ de l'équation d'Euler-Lagrange, si L est indépendante du temps,
$$\exists c \in \mathbb{R},\ \text{tel que } L(q(t), q'(t)) - \partial_v L(q(t), q'(t)) \cdot q'(t) = c.$$
4. Application : quelle équation retrouve-t-on pour $L(x, v) = \frac{m|v|^2}{2} - V(x)$?
5. Application : montrer que le plus court chemin entre deux points du plan euclidien est la droite.
6. On définit le Hamiltonien H comme la transformée de Legendre du Lagrangien :
$$H(t, x, v) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{v \cdot y - L(t, x, y)\}.$$
   On peut montrer que si L est $\mathcal{C}^2$, convexe en v et croissant plus rapidement que $|v|^2$, alors H est bien défini et $\mathcal{C}^1$.
   (a) Soit $q : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un chemin $\mathcal{C}^2$ et $p(t) = \partial_v L(t, \gamma, \dot{\gamma})$. Montrer que q vérifie l'équation d'Euler-Lagrange si, et seulement si, (q, p) vérifie :
$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_v H(t, x, v) \\ \dot{p} = -\partial_x H(t, x, v). \end{cases}$$
   (b) Que retrouve-t-on pour $L(x, v) = \frac{m|v|^2}{2} - V(x)$?
   (c) Quelle est la quantité conservée au cours du temps si L ne dépend pas de t ?