TD 7 : Équations aux dérivées partielles elliptiques

1 Existence de solutions et point de vue énergétique

Exercice 1. (Problème de Sturm-Liouville en 1D). On considère le problème suivant, dit de Sturm-Liouville :

$$\begin{aligned} -(pu')' + qu = f \text{ sur } I =]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

avec $p \in C^1(\bar{I})$, $q \in C^0(\bar{I})$ et $f \in L^2(I)$.

1. Donner la formulation faible de ce problème.
2. On suppose que pour tout x dans I, $p(x) \geqslant \alpha > 0$ et $q \geqslant 0$. Montrer qu'il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(I)$ de ce problème. De quel problème de minimisation u est-elle solution ?
3. Quelle régularité a-t-on sur u si $f \in L^2(I)$? Si $f \in C^0(\bar{I})$?

On considère maintenant le problème suivant :

$$\begin{aligned} -(pu')' + ru' + qu = f \text{ sur } I =]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

4. Donner la formulation faible de ce problème. Donner une condition suffisante sur p, q et r pour que la forme bilinéaire apparaissant dans cette formulation soit coercive.
5. Soir R une primitive de r/p et $\zeta = \mathrm{e}^{-R}$. Montrer qu'à l'aide de ζ que le problème (2) peut se mettre sous la forme (1).

Exercice 2. Soit Ω un ouvert borné régulier. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

1. Montrer l'unicité d'une solution forte lorsque $f \in C^0(\Omega)$.
2. Montrer l'équivalence entre les assertions

$$u \text{ est une solution } C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \text{ de } (3)$$

et

$$u \text{ minimise } \quad I : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ w & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{2}|Dw|^2 - fw \end{array}, \text{ avec } A = \left\{ w \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega),\ w = g \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

3. On considère maintenant le problème de minimisation de I sur $H_0^1(\Omega)$. Montrer qu'un minimum de I est une solution faible de (3) (pour $g = 0$) et inversement.

Exercice 3. Soit $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 1$. On considère la forme bilinéaire a définie sur $H^1(]0,1[)$ par

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv - \left(\int_0^1 u\right)\left(\int_0^1 v\right),$$

et on définit $V = \{v \in H^1(]0,1[), v(1) = kv(0)\}$.

1. Montrer que V est bien défini, et est un sous espace fermé de $H^1(]0,1[)$.

2. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout v dans V,
$$\|v\|_\infty \leqslant C\|v'\|_2$$
et expliciter C en fonction de k. (*Indication :* On pourra commencer par majorer $|v(0)|$).
3. Montrer que pour tout $f \in L^2(]0,1[)$, il existe un unique $u \in V$ tel que
$$\forall v \in V,\ a(u,v) = \int_0^1 fv.$$
4. Montrer alors que ce u appartient à $H^2(]0,1[)$.
5. Montrer que si de plus, f est une fonction continue, u est une solution $C^2(0,1)$ du problème
$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) - \int_0^1 u(t)\mathrm{d}t = f(x), \\ u(1) = ku(0), \\ ku'(1) = u'(0). \end{cases}$$

Exercice 4. (Lax-Milgram). Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un ouvert connexe, régulier et borné, dont on note le vecteur unitaire sortant n. On considère le problème elliptique avec conditions de Neumann suivant :
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) + b \cdot \nabla u = f & \text{sur } \Omega \\ -A\nabla u \cdot n = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$
avec $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$, A une matrice symétrique définie positive, $b \in H^1(\Omega)$ à divergence nulle, et vérifiant $b \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$.

Établir une formulation faible du système, et montrer qu'il existe une unique solution faible (à addition d'une constante près), et sous réserve d'une condition de compatibilité entre f et g.

2 Simulations numériques

Exercice 5. (Problème elliptique élémentaire). On considère le problème de Laplace :
$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x),\ x \in]0,1[, \\ u(0) = \alpha,\ u(1) = \beta. \end{aligned}$$

1. Écrire une routine qui résout cette équation par une discrétisation aux différences finies.
2. On choisit $f(x) = (1 + 2x - x^2)\mathrm{e}^x$, $c(x) = x$. Trouver la solution exacte u (on pourra prendre des valeurs particulières pour α et β pour simplifier la solution).
3. Comparer les deux solutions et afficher l'erreur en fonction du pas de discrétisation (en échelle loglog).
4. Reprendre les questions précédentes avec les conditions de bords suivantes :
$$u(0) = \alpha,\ u'(1) = \beta.$$
Comment discrétiseriez-vous la condition de Neumann à l'ordre 1 ? à l'ordre 2 ?
5. Reprendre les questions précédentes avec les conditions de bords de Robin :
$$au(0) - u'(0) = \alpha,\ au(1) + u'(1) = \beta.$$
avec $a \geqslant 0$.

Exercice 6. (Une méthode de tir pour résoudre un problème elliptique). On considère le problème suivant, pour $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -u''(x) + (x+r)u(x) = 0, \quad x \in]0,1[, \\ u'(0) = 1, \ u'(1) = 0. \end{cases}$$

Le résoudre avec une méthode de tir.

Exercice 7. (Schéma de type volumes finis). On définit les schémas de type *volumes finis* comme suit : on discrétise l'intervalle $[0,1]$ suivant deux jeux de points étant donnés un entier $N > 0$ et $h = 1/(N+1)$,

$$x_{i+1/2} = (i+1/2)h, \ i \in [\![0, N]\!],$$
$$x_j = jh, \ j \in [\![0, N+1]\!].$$

On considère des problèmes du type :

$$\begin{cases} -(pu')'(x) = F(u(x), x), \quad x \in]0,1[, \\ u(0) = \alpha, \ u(1) = \beta. \end{cases}$$

Lorsque l'on intègre l'équation entre $x_{i-1/2}$ et $x_{i+1/2}$, il vient que, pour tout i,

$$pu'(x_{i-1/2}) - pu'(x_{i+1/2}) = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} F(u(x), x) dx.$$

On approche l'intégrale de droite par la méthode du point milieu et les dérivées de u en les $x_{i+1/2}$ par des développement limités en x_j et x_{j+1}.

1. Écrire la discrétisation complète de l'équation en les points x_j.
2. On considère l'équation de Sturm :

$$\begin{cases} -(pu')'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \\ u(0) = \alpha, \ u(1) = \beta. \end{cases}$$

   Écrire une routine qui résolve cette équation par une discrétisation de type volumes finis.

Exercice 8. (Pour les plus motivés). On considère le problème de Laplace :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) + c(x,y)u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in]0,1[^2, \\ u(0,y) = 1, \\ u(1,y) = u(x,0) = u(x,1) = 0. \end{cases}$$

Résoudre ce problème numériquement par une méthode au différences finies. On écrira au préalable la matrice de discrétisation.