# TD 8 : Équation de la chaleur

**Exercice 1.** Trouver une formule explicite pour la solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + cu = f, & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ u = g, & \text{sur } \{0\} \times \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

où $c$ est une constante réelle.

**Exercice 2.** On considère l'équation de la chaleur avec la condition initiale suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & t > 0,\ x \in ]0,1[, \\ u(0,x) = \sin(\pi x), & x \in ]0,1[, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

1. Caluler la solution exacte.
2. Implémenter les trois schémas présentés en cours (Euler implicite, explicite, Crank-Nicolson) pour les temps $T \in [0,1]$.
3. Mettre en évidence la décroissance de l'énergie.
4. Mettre en évidence l'ordre en temps et en espace des schémas.
5. Reprendre les questions 2 et 3 avec $u_0 = \chi_{[1/4,3/4]}$. A-t-on propagation à vitesse infinie de l'information ?
6. Calculer la solution exacte pour cette nouvelle condition initiale grâce aux séries de Fourier, et comparer les solutions approchées à la solution exacte. Que peut-on dire sur l'erreur commise ? Comment l'expliquer ? Qu'observe-t-on pour le schéma de Crank-Nicolson lorsque $2\Delta t \simeq (\Delta x)^2$ ?

**Exercice 3.** Soit $\alpha > 0$. On considère l'équation de la chaleur non homogène

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha u(1-u), & t > 0,\ x \in ]0,1[, \\ u(0,x) = u_0, & x \in ]0,1[, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

On pose respectivement $u_0(x) = \sin(\pi x)$ puis $u_0 = \chi_{[1/4,3/4]}$.

1. Voir que, dans les deux cas, la solution numérique donnée par le schéma d'Euler explicite explose si la condition de CFL $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leqslant \frac{1}{2}$ n'est pas remplie.
2. Implémenter le schéma de Crank-Nicolson ($\theta$-schéma pour $\theta = 1/2$) et le schéma d'Euler implicite. À chaque pas de temps, on utilisera une méthode de Newton pour résoudre l'équation non linéaire faisant intervenir le vecteur $u^{n+1}$. Pour l'initialisation de la méthode de Newton, on peut choisir
   — $x^0 = u^n$,
   — $x^0 = \tilde{u}^{n+1}$ où $\tilde{u}^{n+1}$ est le vecteur obtenu à partir de $u^n$ avec un pas de la méthode d'Euler explicite (on parle de méthode *prédiction-correction*).
3. Comparer les solutions et la rapidité des schémas.
4. Quel est l'effet du second membre ? Montrer que si $u$ est une solution positive, et $\alpha < \pi^2$, alors $u(.,t) \to 0$ dans $L^2$ lorsque $t \to +\infty$.

**Exercice 4.** On reprend le problème de l'exercice précédent. On considère les différents schémas *de splitting*.

— Le premier consiste d'abord à traiter le terme source, puis le terme diffusif :
  i. Poser $u^{n+1/2} = u^n + \Delta t \alpha u^n (1 - u^n)$,
  ii. puis poser $u^{n+1} = \left(I - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A\right) u^{n+1/2}$

— Le deuxième consiste en l'inverse :
  i. Poser $u^{n+1/2} = \left(I - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} A\right) u^n$,
  ii. puis poser $u^{n+1} = u^{n+1/2} + \Delta t \alpha u^{n+1/2}(1 - u^{n+1/2})$.

1. Implémenter ces schémas. L'un semble-t-il mieux converger que l'autre ?
2. Quelles seraient les versions implicites de ces schémas ?