TD 9 : Équation de transport

1 Partie théorique

Exercice 1. (Avec une inconnue multi-dimensionnelle). Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ que l'on suppose diagonalisable dans la base $(R_i)_{i \leqslant n}$ de valeurs propres $(\lambda_i)_{i \leqslant n}$. On s'intéresse au problème de transport multi-dimensionnel

$$\begin{cases} \partial_t U + A \partial_x U = 0 \\ U(0,x) = U_0(x) \end{cases}$$

Donner la solution du problème en fonction des R_i, des λ_i et de U_0.

Exercice 2. (Avec une vitesse non constante). On s'intéresse au problème de transport :

$$\begin{cases} \partial_t u + (x^2 - 1) \partial_x u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

sur le domaine $t \geqslant 0$ et $x \in]-1, 1[$.

1. Écrire et résoudre l'équation des caractéristiques.
2. Donner explicitement la solution.
3. Que se passe-t-il si on ne se restreint pas à $x \in]-1, 1[$?

2 Schémas numériques

Exercice 3. (Transport 101). Résoudre numériquement l'équation de transport linéaire :

$$\partial_t u + c \partial_x u = 0.$$

avec la condition initiale de votre choix (régulière ou pas). On testera d'abord les schémas explicites décentrés, puis le schéma implicite centré. On mettra en évidence les différents ordres de convergence, ainsi que l'influence de la condition initiale sur l'ordre, en choisissant par exemple pour condition initiale la fonction

$$g_k(x) = \mathbb{1}_{[1/4,3/4]}(x) \sin^k(2\pi(x - 1/4)), \quad \text{où } k \in [\![0, 3]\!].$$

On mettra également en évidence la condition CFL pour la stabilité des schémas explicites.

Exercice 4. (Remake du transporteur). Reprendre l'exercice précédent avec l'équation de Burgers et le schéma décentré amont, ainsi que le schéma centré implicite.

Exercice 5. (Milieu bi-fluide). On considère l'équation de conservation suivante :

$$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{u^2 + (1-u)^2} \right) = 0.$$

Résoudre le problème de Riemann pour les conditions initiales

$$u^0 = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} \quad \text{et} \quad u^0(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}.$$

On pourra utiliser le schéma décentré amont, ou le schéma de Lax-Friedrichs pour le transport non-linéaire :

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2}}{\Delta t} + \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta x}, \quad \text{où } f_j^n = f(u_j^n), \quad \text{et } f(u) = \frac{u^2}{u^2 + (1-u)^2}.$$

Que donne la condition de Rankine Hugoniot ?