Approximation uniforme : polynômes de Bernstein

Le théorème de Stone-Weierstrass assure la densité des polynômes dans l'espace des fonctions continues définies sur un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, mais sa preuve n'est pas constructive. Les polynômes de Bernstein, bien qu'applicables seulement en dimensoin 1, offrent une suite explicite de polynômes d'approximation uniforme.

Définition 1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. On définit le n-ième polynôme de Bernstein associé à f par

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}.$$

Si X_n est une variable aléatoire de loi binômiale de paramètre x, alors $B_n(f)(x) = \mathbb{E}[f(X_n/n)]$. On s'attend à ce que $B_n(f)$ converge vers f, puisque X_n/n converge en probabilité vers x.

Définition 2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Le module de continuité de f est défini pour $\delta > 0$ par

$$\omega(f,\delta) = \sup_{|x-x'|} |f(x) - f(x')|.$$

Proposition 3. *Le module de continuité vérifie les propriétés suivantes :*
(i) $\delta \mapsto \omega(f,\delta)$ *est une fonction croissante,*
(ii) $\lim_{\delta\to 0} \omega(f,\delta) = 0$*,*
(iii) $\omega(f,.)$ *est sous-additive, c'est-à-dire que* $\omega(f,\delta_1+\delta_2) \leqslant \omega(f,\delta_1) + \omega(f,\delta_2)$.

Les points (i) et (iii) sont élémentaires. Le deuxième point, quant à lui, est une conséquence du théorème de Heine : f est uniformément continue sur $[0,1]$. Grâce au module de continuité, on est en mesure d'établir la convergence des polynômes de Bernstein vers f.

Théorème 4. *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$*. Les polynômes de Bernstein* $B_n(f)$ *vérifient alors*

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{9}{4}\omega(f, 1/\sqrt{n}).$$

En particulier, $B_n(f)$ *converge uniformément vers* f*.*

Démonstration. $B_n(1) = 1$, donc pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Notons que, pour $\delta > 0$ fixé, pour tout $x, y \in [0,1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant (p+1)\omega(f,\delta), \quad \text{où } p = \left\lfloor \frac{|x-y|}{\delta} \right\rfloor$$

(pour s'en convaincre, il suffit de choisir des points $\xi_1, \ldots, \xi_p$ équirépartis entre x et y). En particulier,

$$|f(x) - f(k/n)| \leqslant \left(\frac{|x-k/n|}{\delta} + 1\right)\omega(f,\delta).$$

On somme cette inégalité sur $k \in [\![0,n]\!]$. La somme portant sur le second terme $\omega(f,\delta)$ ne dépend pas de k, et sa somme est donc $\omega(f,\delta)$. On sépare l'autre somme en deux :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{|x-n/k|}{\delta} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{|x-n/k|<\delta} (\ldots) + \sum_{|x-n/k|\geqslant\delta} (\ldots) \\
&\leqslant 1 + \sum_{|x-n/k|\geqslant\delta} \binom{n}{k} \left(\frac{|x-n/k|}{\delta}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(x-n/k)^2}{\delta^2} x^k (1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

On montre l'identité suivante pour conclure :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x - n/k)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

À cet effet, il suffit de développer le carré, et d'utiliser les identités suivantes

- $\sum \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^k = x \sum \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = x,$
- $\sum \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^k = x^2,$ et donc $\sum \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^k = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x.$

Finalement, on a montré que

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \omega(f, \delta)\left(2 + \frac{x(1-x)}{n\delta^2}\right),$$

et on obtient le résultat en choisissant $\delta = n^{-1/2}$ et en remarquant que $x(1-x) \leqslant 1/4$ pour tout $x \in [0,1]$. $\square$

Corollaire 5. *Si f est K-lipschitzienne sur $[0,1]$, alors*

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \leqslant \frac{9K}{4\sqrt{n}}.$$