Intégration numérique : méthodes de Gauss

Étant donné un poids $\omega \geqslant 0$ sur $]a, b[$, on cherche la méthode de quadrature élémentaire d'ordre maximal pour un nombre de points $(\xi_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ fixé :

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx \simeq \sum_{j=0}^n \omega_j f(\xi_j)$$

Théorème 1. *Il existe un unique choix de (ω_j) et de (ξ_j) tel quel la méthode soit d'ordre $\geqslant 2n+1$. Les points (ξ_j) sont les racines du $(n+1)$-ième polynôme orthogonal dans $L^2(\omega)$, et les poids ω_j sont donnés par*

$$\omega_j = \int_a^b L_j(x)\omega(x)dx, \quad L_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - \xi_i}{\xi_j - \xi_i}.$$

Démonstration. Soient p_{n+1} le $(n+1)$-ième polynôme orthogonal, les ξ_j ses racines (dont on a montré qu'il y en a $n+1$), et les ω_j définis comme dans l'énoncé du théorème. Montrons que la méthode correspondante est d'ordre $\geqslant 2n+1$. Soit $f \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. La division euclidienne de f par p_{n+1} s'écrit $f = p_{n+1}q + r$, où q et r sont des polynômes de degré $\leqslant n$. Comme p_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx = \int_a^b r(x)\omega(x)dx.$$

Par ailleurs, r est égal à son polynôme interpolateur par les points $(\xi_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$, et donc

$$\begin{aligned}\int_a^b r(x)\omega(x)dx &= \int_a^b \sum_{j=0}^n r(\xi_j)L_j(x)\omega(x)dx \\ &= \sum_{j=0}^n \omega_j r(\xi_j) = \sum_{j=0}^n \omega_j f(\xi_j),\end{aligned}$$

ce qui prouve que la méthode est bien d'ordre $\geqslant 2n+1$.

Montrons maintenant l'unicité. On suppose que le choix de (ξ_j), (ω_j) donne une méthode d'ordre $\geqslant 2n+1$. On pose alors $\pi_{n+1} = \prod_{j=0}^n (X - \xi_j) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Si $p \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $p\pi_{n+1}$ est de degré inférieur ou égal à $2n+1$, donc la méthode est exacte pour ce polynôme :

$$\int_a^b p\pi_{n+1}\omega = \sum_{j=0}^n \omega_j p(\xi_j)\pi_{n+1}(\xi_i) = 0,$$

donc π_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$. Comme il est de degré $n+1$ et unitaire, π_{n+1} est nécessairement le $(n+1)$-ième polynôme orthogonal associé au poids ω, et on en déduit l'unicité des ξ_j. Finalement, les poids sont uniquement déterminés en fonction des ξ_j :

$$\omega_i = \sum_{j=0}^n \omega_j L_i(\xi_j) = \int_a^b L_i(x)\omega(x)dx.$$

□

On a seulement prouvé que cette méthode est d'ordre supérieur ou égal à $2n+1$, mais on peut prouver mieux en affinant l'analyse de la méthode, et affirmer que l'ordre est exactement $2n+1$. En particulier, Demailly prouve le résultat suivant :

Théorème 2. *Si $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b])$, alors il existe un point $\xi \in]a, b[$ tel que*

$$E(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx - \sum_{j=0}^n \omega_j f(\xi_j) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b p_{n+1}(x)^2\omega(x)dx.$$