Méthode de Newton n-dimensionnelle

La méthode de Newton en dimension 1 se généralise naturellement en dimension n. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $F \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}^n)$. L'algorithme de Newton s'écrit alors

Entrée : F, dF, x_0, ε
$k \leftarrow 0$, $\varepsilon_0 = 1$
tant que $\varepsilon_k > \varepsilon$ **faire**
    $x_{k+1} = x_k - (dF(x_k))^{-1} F(x_k)$
    $\varepsilon_{k+1} = |x_{k+1} - x_k|$
    $k \leftarrow k + 1$
fin tant que
renvoyer x_k

Sa convergence (et sa bonne définition) est assurée par le théorème suivant :

Théorème. Si F est de classe $\mathcal{C}^2$, s'annule en $x \in U$, et $dF(x)$ est inversible, alors il existe $\delta > 0$ tel que la méthode de Newton est bien définie pour tout $x_0 \in B(x, \delta)$, converge localement vers x, et est d'ordre au moins 2.

Démonstration. D'une part, notons que $y \mapsto \det(dF(y))$ est continue, et donc $dF(y)$ est inversible pour tout y dans un voisinage de x. De plus, $y \mapsto \|(dF(y))^{-1}\|$ est continue sur son ensemble de définition, car

$$(dF(y))^{-1} = \frac{\mathrm{Com}(dF(y))^T}{\det(dF(y))},$$

et donc il existe $\delta > 0$ tel que $\forall y \in B(x, \delta)$,

(i) $dF(y)$ est inversible,
(ii) $\|(dF(y))^{-1}\| \leqslant 2\|(dF(x))^{-1}\|$.

D'autre part, en utilisant la formule de Taylor appliquée à $f(t) = F(tx + (1-t)y$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 = F(x) = f(1) &= f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t) f''(t) dt \\ &= F(y) + dF(y)(x-y) + \int_0^1 (1-t) d^2F(tx + (1-t)y)(x-y, x-y) dt, \end{aligned}$$

et donc

$$\|F(y) + dF(y)(x-y)\| \leqslant \frac{\|d^2F\|_\infty}{2} \|x-y\|^2,$$

où $\|d^2F\|_\infty = \sup_{\xi \in B(x,\delta)} \|d^2F(\xi)\|$.

Finalement, il vient, en posant $\tilde{y} = y - (dF(y))^{-1}F(y)$, qui est bien défini si $y \in B(x, \delta)$,

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{y}\| &= \|x - y + (dF(y))^{-1}F(y)\| \\ &= \|(dF(y))^{-1}(dF(y)(x-y) + F(y)\| \\ &\leqslant \|(dF(y))^{-1}\| \|dF(y)(x-y) + F(y)\| \\ &\leqslant C\|x-y\|^2, \end{aligned}$$

avec $C = \|(dF(x))^{-1}\| \|d^2F\|_\infty$.

Quitte à remplacer δ par $\min(\delta, 1/C)$, on peut supposer que $\delta \leqslant 1/C$. Dans ce cas, si $y \in B(x, \delta)$, alors $\|x - \tilde{y}\| < C\delta^2 \leqslant \delta$, ce qui prouve la bonne définition de la méthode, et que son ordre est au moins 2. Par ailleurs, la convergence est immédiate en remarquant que

$$\begin{aligned} \|x_k - x\| &\leqslant C\|x_{k-1} - x\|^2 \leqslant C^{1+2}\|x_{k-2} - x\|^4 \leqslant \dots \\ &\leqslant \frac{1}{C}(C\|x_0 - x\|)^{2^k}. \end{aligned}$$

□