Devoir en temps libre 1

À rendre pour le lundi 19 septembre

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est proscrit lors des devoirs sur table, il est donc fortement recommandé de s'habituer dès maintenant à ces nouvelles exigences.

Pour les devoirs maison, il est possible de travailler à plusieurs pour réfléchir aux exercices, de se faire aider (après avoir essayé) ou de poser des questions au professeur. Par contre, il est indispensable que la rédaction des exercices soit personnelle.

Exercice 1.

1. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$, l'inéquation : $x^2 + 3x + 1 \leqslant 2x + 7$.
2. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$, l'inéquation : $|3x + 2| - 1 < |x + 4|$.
3. Même question pour $\frac{|2x+1|}{x-1} \leqslant x + 1$.

Exercice 2.

1. Pour a et b des réels, développer et simplifier l'expression $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
2. Vérifier les deux égalités suivantes :

$$\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} = \frac{2}{3} \times \left(1 + \frac{1}{2 \times 3}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \times \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} = \frac{2}{3} \times \left(1 + \frac{1}{3 \times 4}\right).$$

3. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \times \cdots \times \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3} \times \left(1 + \frac{1}{n \times (n+1)}\right)$$

Exercice 3. On considère (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}$.

1. Calculer les valeurs de u_1, u_2, u_3 et u_4 sous forme de fractions simplifiées.
2. Que peut-on conclure sur le sens de variation de la suite (u_n) ?
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égale à 3, $u_{n+1} > u_n$.
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{10}n + \frac{1}{2}$.
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donner l'expression de son terme général (c'est-à-dire v_n en fonction de n).
5. En conclure que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + n - 5.$$

($\star$) 6. Déterminer la limite de la suite (u_n).