Corrigé du devoir en temps libre n° 1

Exercice 1.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2+3x+1 \leqslant 2x+7$ si et seulement si $x^2+x-6 \leqslant 0$. On cherche les racines de ce polynôme du second degré : le discriminant est égal à $1^2+6\times 4 = 25$, donc puisqu'il est strictement positif le polynôme a deux racines. Ces racines sont égales à $\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{2}$, c'est-à-dire -3 et 2. Comme le coefficient devant le terme dominant est positif, le polynôme est strictement positif en dehors de l'intervalle $[-3,2]$ et l'ensemble des solutions est donc $\boxed{[-3,2]}$.
2. Notons (E_1) : $|3x+2|-1 < |x+4|$ l'inéquation à résoudre pour $x \in \mathbb{R}$.
   On distingue les cas en fonction des signes des expressions à l'intérieur des valeurs absolues (à l'aide d'un tableau de signe si besoin).
   — Si $x \leqslant -4$, on a :
   $$(E_1) \iff -3x-2-1 < -x-4 \iff x > \frac{1}{2}$$
   Il n'y a donc pas de solution dans ce premier cas.
   — Si $x \in]-4,-\frac{2}{3}]$, on a
   $$(E_1) \iff -3x-2-1 < x+4 \iff -7 < 4x.$$
   Dans cet intervalle, les solutions sont donc $]-\frac{7}{4},-\frac{2}{3}]$.
   — Enfin, si $x > -\frac{2}{3}$, on al
   $$(E_1) \iff 3x+2-1 < x+4 \iff 2x < 3.$$
   Sur cet intervalle, les solutions sont donc $]-\frac{2}{3},\frac{3}{2}[$.
   L'ensemble des solutions de (E_1) est donc $\boxed{\left]-\frac{7}{4},\frac{3}{2}\right[}$.
3. Notons (E_2) l'inéquation $\frac{|2x+1|}{x-1} \leqslant x+1$. On cherche les solutions en distinguant trois cas :
   — Si $x < -\frac{1}{2}$, (E_2) est équivalente à $-2x-1 \geqslant (x+1)(x-1)$ (en multipliant par $x-1<0$). Or on a
   $$-2x-1 \geqslant x^2-1 \iff 0 \geqslant x^2+2x \iff 0 \geqslant (x+1)^2-1 \iff (x+1)^2 \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x+1 \leqslant 1.$$
   Ainsi, dans ce cas les solutions sont $[-2,-\frac{1}{2}[$.
   — Si $x \in [-\frac{1}{2},1[$, on a
   $$(E_2) \iff 2x+1 \geqslant x^2-1 \iff 0 \geqslant (x-1)^2-3 \iff (x-1)^2 \leqslant 3 \iff -\sqrt{3} \leqslant x-1 \leqslant \sqrt{3}.$$
   Ainsi, dans ce cas les solutions sont $[-\frac{1}{2},1[$ (car $-\sqrt{3}+1 < -\frac{1}{2}$).
   — Si $x > 1$,
   $$(E_2) \iff 2x+1 \leqslant x^2-1 \iff 0 \geqslant (x-1)^2-3 \iff (x-1)^2 \geqslant 3 \iff x-1 \leqslant -\sqrt{3} \text{ ou } x-1 \geqslant \sqrt{3}.$$
   Ainsi, dans ce cas les solutions sont $[1+\sqrt{3},+\infty[$.
   En conclusion, l'ensemble des solutions de (E_2) est $\boxed{\left]-2,1\right[\cup \left[1+\sqrt{3},+\infty\right[}$.

Exercice 2.

1. En développant, on obtient : $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$.
2. $$\frac{2^3-1}{2^3+1} = \frac{7}{9} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{3}\times\left(1+\frac{1}{2\times 3}\right) = \frac{2}{3}\times\frac{7}{6} = \frac{7}{9}.$$
   $$\frac{2^3-1}{2^3+1}\times\frac{3^3-1}{3^3+1} = \frac{7}{9}\times\frac{26}{28} = \frac{7\times 13\times 2}{9\times 4\times 7} = \frac{13}{18} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{3}\times\left(1+\frac{1}{3\times 4}\right) = \frac{2}{3}\times\frac{13}{12} = \frac{13}{18}.$$
   Les deux égalités demandées sont vérifiées.

3. Pour $n \geqslant 2$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$ suivante :

$$\frac{2^3-1}{2^3+1} \times \frac{3^3-1}{3^3+1} \times \cdots \times \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right).$$

— On a vérifié à la question précédente que $\underline{\mathcal{P}(2) \text{ est vraie}}$.

— Soit un entier $n \geqslant 2$, et $\underline{\text{supposons que } \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}}$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{2^3-1}{2^3+1} \times \frac{3^3-1}{3^3+1} \times \cdots \times \frac{n^3-1}{n^3+1} \times \frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1} &= \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right) \times \frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{n(n+1)+1}{n(n+1)} \times \frac{n\left((n+1)^2+(n+1)+1\right)}{(n+2)\left((n+1)^2-(n+1)+1\right)} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{(n+1)(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $\underline{\mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie}}$

Par récurrence, on a montré que $\underline{\mathcal{P}(n) \text{ est vraie pour tout entier } n \geqslant 2}$.

Exercice 3.

1. On a

$$u_1 = \frac{1}{2} \times 5 - \frac{3}{2} = 1 \quad u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}, \quad u_3 = -\frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4} \quad \text{et} \quad u_4 = -\frac{3}{8} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{8}.$$

2. La suite n'est pas croissante (car par exemple, $u_2 < u_1$) et elle n'est pas décroissante (car par exemple $u_4 > u_3$).

3. Considérons la propriété $P(n)$: $u_{n+1} > u_n$ et démontrons par récurrence qu'elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 3$.

— D'après les calculs de la question 1, on a $u_4 = -\frac{3}{8} > -\frac{3}{4} = u_3$ donc $\underline{P(3) \text{ est vraie.}}$

— Soit un entier $n \geqslant 3$ et $\underline{\text{supposons } P(n) \text{ vraie}}$. Or on a

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}(n+1) - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{2}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1} - u_n > 0$. Ainsi, $u_{n+2} - u_{n+1} > \frac{1}{2} > 0$, et donc $\underline{P(n+1) \text{ est vraie.}}$

Par récurrence, on a montré que $\underline{\text{pour tout entier } n \geqslant 3,\ u_{n+1} > u_n.}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} = \frac{1}{10}u_{n+1} - \frac{1}{10}(n+1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{20}u_n + \frac{1}{20}n - \frac{3}{20} - \frac{1}{10}n - \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}u_n - \frac{1}{10}n + \frac{1}{2}\right) \boxed{= \frac{1}{2}v_n.}$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{10} \times 5 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n \boxed{= \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

5. D'après la relation entre (u_n) et (v_n), on a

$$u_n = 10\left(\frac{1}{10}v_n + \frac{1}{10}n - \frac{1}{2}\right) = \boxed{10\left(\frac{1}{2}\right)^n + n - 5.}$$

($\star$) 6. On sait que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ et que $n \to +\infty$, donc par somme de limites, on a $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$