Devoir en temps libre 2

À rendre pour le vendredi 7 octobre

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est proscrit lors des devoirs sur table, il est donc fortement recommandé de s'habituer dès maintenant à ces nouvelles exigences.

Pour les devoirs maison, il est possible de travailler à plusieurs pour réfléchir aux exercices, de se faire aider (après avoir essayé) ou de poser des questions au professeur. Par contre, il est indispensable que la rédaction des exercices soit personnelle.

Exercice 1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit la proposition $\mathcal{P}(p)$: « $\exists k \in \mathbb{N},\ 2^p - 2 = kp.$ »

1. Écrire la négation de $\mathcal{P}(p)$.
2. Vérifier que $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$ et $\mathcal{P}(5)$ sont vraies. Que peut-on dire de $\mathcal{P}(4)$?
3. Trouver un entier $p > 5$ tel que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie.

On considère l'implication :« p est un nombre premier $\Longrightarrow \mathcal{P}(p)$ ».
La définition de nombre premier n'a aucune importance pour traiter correctement l'exercice.

4. Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de cette implication.
5. On admet que l'implication est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$. Que peut-on déduire de « $\mathcal{P}(143)$ est fausse » ? de « 137 est un nombre premier » ? de « $\mathcal{P}(163)$ est vraie » ?
6. Écrire trois phrases, une avec « si ... alors ... », une avec « il est nécessaire que ... » et une avec « il suffit que ... » qui ont le même sens que cette implication.

Exercice 2. On note $E = \mathbb{N}^2$ l'ensemble des couples de nombres entiers et on considère les parties de E suivantes :

$$A = \big\{(k, 2k)\,;\, k \in \mathbb{N}\big\}, \qquad B = \big\{(a,b) \in E \,|\, a + b \leqslant 10\big\} \quad \text{et} \quad C = \big\{(i,j) \in E \,|\, \exists n \in \mathbb{N}, 10i + j = 3n\big\}.$$

1. Donner un exemple d'élément de chacun des ensembles A, B et C, autre que $(0,0)$, en justifiant leur appartenance à l'ensemble.
2. Donner un élément de $A \cap B \cap C$ autre que $(0,0)$ puis de $A \cap \overline{B}$.
3. Déterminer tous les éléments de $A \cap B$.
4. Démontrer que $A \subset C$, puis déterminer, en justifiant, si l'inclusion $C \subset A$ est vraie.

Exercice 3 (Suite de Sylvester)**.** On définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $s_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = 1 + \displaystyle\prod_{k=0}^{n} s_k$.

1. a. Calculer s_1, s_2 et s_3.
   b. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = 1 + (s_n - 1)s_n$.
   c. Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $s_n \geqslant n! + 1$.
   d. En déduire que la suite $\left(\frac{2^n}{s_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k}$.
   a. Montrer que (T_n) est majorée en utilisant le fait que $\left(\frac{2^n}{s_n}\right)$ est bornée.
   b. Pour $k \in \mathbb{N}$, simplifier $\dfrac{1}{s_k - 1} - \dfrac{1}{s_{k+1} - 1}$.
   c. En déduire une expression de T_n en fonction de s_{n+1}.

($\star$) 3. En utilisant ce qui précède, montrer que la suite (T_n) converge et préciser sa limite.