Corrigé du devoir en temps libre 2

Exercice 1. 1. Pour $p \in \mathbb{N}$, la négation de $\mathcal{P}(p)$ est « $\forall k \in \mathbb{N},\ 2^p - 2 \neq kp$ », autrement dit « $2^p - 2$ n'est pas un multiple de p ».

2. Pour $p = 2$, $2^p - 2 = 2 = kp$ avec $k = 1$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^p - 2 = kp$ et $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
Pour $p = 3$, $2^p - 2 = 6 = kp$ avec $k = 2$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^p - 2 = kp$ et $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
Pour $p = 5$, $2^p - 2 = 30 = kp$ avec $k = 6$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^p - 2 = kp$ et $\mathcal{P}(5)$ est vraie.
Pour $p = 4$, $2^p - 2 = 14$ n'est pas un multiple de 4, donc $\mathcal{P}(4)$ est fausse.
3. Si $p = 7$, $2^p - 2 = 126 = kp$ avec $k = 18$, donc $\mathcal{P}(7)$ est vraie.
4. Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère l'implication : « p est un nombre premier $\Longrightarrow \mathcal{P}(p)$ ».
   - La négation de cette implication est « p est un nombre premier et $\mathcal{P}(p)$ est fausse. ».
   - La contraposée de cette implication est « $\operatorname{non}(\mathcal{P}(p)) \Longrightarrow p$ n'est pas un nombre premier ».
   - La réciproque de cette implication est « $\mathcal{P}(p) \Longrightarrow p$ est un nombre premier ».
5. L'implication est supposée vraie, donc sa contraposée est également vraie.
   - En écrivant la contraposée pour $p = 143$, de « $\mathcal{P}(143)$ est fausse » on déduit que 143 n'est pas premier.
   - De « 137 est un nombre premier », on déduit $\mathcal{P}(137)$ en appliquant l'implication à $p = 137$.
   - De « $\mathcal{P}(163)$ est vraie », on ne peut rien déduire.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$. L'implication peut se lire :
   - « Si p est un nombre premier, alors $\mathcal{P}(p)$ est vérifiée ».
   - « Il est nécessaire que $\mathcal{P}(p)$ soit vérifiée pour que p soit un nombre premier ».
   - « Il suffit que p soit un nombre premier pour que $\mathcal{P}(p)$ soit vérifiée ».

Exercice 2. 1.
   - Le couple d'entiers naturels $(1, 2)$ appartient à A car $(1, 2)$ s'écrit $(k, 2k)$ pour l'entier $k = 1 \in \mathbb{N}$.
   - Le couple d'entiers naturels $(3, 5)$ appartient à B car ses coordonnées vérifient l'inéquation $3+5 \leqslant 10$.
   - Le couple d'entiers naturels $(3, 9)$ appartient à C car $10 \times 3 + 9 = 39 = 3n$ avec $n = 13 \in \mathbb{N}$.

2. Le couple d'entiers naturels $(3, 6)$ appartient aux trois ensembles : en effet $(3, 6) = (k, 2k)$ pour $k = 3$, $3 + 6 \leqslant 10$ et $10 \times 3 + 6 = 3n$ avec $n = 12$. Donc $\boxed{(3, 6) \in A \cap B \cap C}$.
Le couple d'entiers naturels $(10, 20)$ appartient à A (avec $k = 10$) mais pas à B (car $10 + 20 > 10$), donc $\boxed{(10, 20) \in A \cap \overline{B}}$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Un élément $(k, 2k)$ de A est dans B si et seulement si $k + 2k \leqslant 10$, c'est-à-dire si et seulement si $k \leqslant 10/3$. On a donc
$$\boxed{A \cap B = \left\{(k, 2k)\,;\, k \in [\![0, 3]\!]\right\} = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6)\} \subset \mathbb{N}^2}$$
4. Montrons que $A \subset C$. Soit $a \in A$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = (k, 2k)$. Alors comme $10 \times k + 2k = 12k = 3n$, avec $n = 4k \in \mathbb{N}$, a appartient aussi à C. On a donc montré que $A \subset C$.
On a vu que le couple $(3, 9)$ est dans C, et il n'est pas dans A puisque $9 \neq 2 \times 3$;
l'inclusion réciproque $C \subset A$ est donc fausse.

Exercice 3 (Suite de Sylvester)**.** On définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $s_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^{n} s_k$.

1. a. On calcule
$$s_1 = 1 + \prod_{k=0}^{0} s_k = 1 + s_0 = \boxed{3},\quad s_2 = 1 + \prod_{k=0}^{1} s_k = 1 + s_0 s_1 = \boxed{7},\quad s_3 = 1 + \prod_{k=0}^{2} s_k = 1 + s_0 s_1 s_2 = \boxed{43}.$$

b. Montrons que pour $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = 1 + (s_n - 1)s_n$. Pour $n = 0$, on a $s_1 = 3 = 1 + (2 - 1) \times 2$. Soit $n \geqslant 1$, on peut écrire
$$s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^{n} s_k = 1 + s_n \prod_{k=0}^{n-1} s_k,$$
or comme $n \geqslant 1$, $s_n = 1 + \prod_{k=0}^{n-1} s_k$ donc $\prod_{k=0}^{n-1} s_k = s_n - 1$, et en injectant dans ce qui précède on obtient le résultat voulu : $\boxed{s_{n+1} = 1 + s_n(s_n - 1)}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $s_n \geqslant n! + 1$ ».
Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $s_0 = 2 \geqslant 0! + 1 = 2$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
Hérédité : on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et on va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est alors aussi vraie. Comme $\mathcal{P}(n)$ est vraie, en particulier on a $s_n - 1 \geqslant n!$, et par ailleurs s_n est strictement positif. On en déduit donc les inégalités suivantes, en appliquant l'hypothèse de récurrence successivement à chacun des deux termes s_n, avec des facteurs strictement positifs :

$$s_{n+1} \underset{\text{1.b.}}{=} 1 + (s_n - 1)s_n \underset{(HR)}{\geqslant} 1 + n!s_n \underset{(HR)}{\geqslant} 1 + n!(n!+1) \geqslant 1 + n!(n+1) = 1 + (n+1)!$$

La dernière inégalité vient du fait que $n! \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc démontré $\mathcal{P}(n+1)$.
Conclusion : On a montré que $\mathcal{P}(0)$ est vraie et que $(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d. Montrons d'abord que pour tout $n \geqslant 4$, on a $2^n \leqslant n!$. On procède par une récurrence express :
- c'est vrai en $n = 4$.
- si $2^n \leqslant n!$ pour un certain $n \geqslant 2$, alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \leqslant 2n! \leqslant (n+1)n! \leqslant (n+1)!$ puisque $n + 1 \geqslant 5 \geqslant 2$.

On a donc prouvé par récurrence que $2^n \leqslant n!$ pour tout $n \geqslant 4$.
La question précédente nous donne que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \geqslant n! + 1$, et comme ces quantités sont strictement positives on a l'inégalité renversée pour les inverses : $\frac{1}{s_n} \leqslant \frac{1}{n!+1}$. Par conséquent, étant donné que $2^n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient grâce à ce qui précède (et au fait que $n! + 1 > 0$) que

$$\forall n \geqslant 4, a \quad \frac{2^n}{s_n} \leqslant \frac{2^n}{n!+1} \leqslant \frac{n!}{n!+1} \leqslant 1.$$

La suite $\left(\frac{2^n}{s_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive donc minorée par 0, et majorée à partir du cinquième terme, donc elle est bornée. *On pourrait remarquer que la suite est majorée par* 1 *en calculant ses premiers termes mais ça n'est pas nécessaire, car les suites bornées à partir d'un certain rang sont bornées.*

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k}$.

a. Comme $\left(\frac{2^n}{s_n}\right)$ est bornée, en particulier il existe un majorant réel M, forcément positif, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2^n}{s_n} \leqslant M$, autrement dit $\dfrac{1}{s_n} \leqslant \dfrac{M}{2^n}$. On peut majorer la somme T_n terme à terme : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{M}{2^k} = M \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = M \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{M}{2} - \frac{M}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leqslant \frac{M}{2}.$$

Comme $\frac{M}{2}$ est indépendant de n, on a montré que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée.

b. D'après la question 1.b., pour $k \in \mathbb{N}$, on a $s_{k+1} - 1 = s_k(s_k - 1)$. Donc en divisant par $(s_{k+1} - 1)(s_k - 1)$ (c'est non nul !), on obtient

$$\frac{1}{s_k - 1} = \frac{s_k}{s_{k+1} - 1} = \frac{1}{s_{k+1} - 1} + \frac{s_k - 1}{s_{k+1} - 1},$$

et par conséquent, on trouve en appliquant à nouveau la question 1.b. :

$$\frac{1}{s_k - 1} - \frac{1}{s_{k+1} - 1} = \frac{s_k - 1}{s_{k+1} - 1} = \boxed{\frac{1}{s_k}}.$$

c. On fait donc apparaître une somme télescopique : si $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k - 1} - \frac{1}{s_{k+1} - 1} = \frac{1}{s_0 - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1} = \boxed{1 - \frac{1}{s_{n+1} - 1}}.$$

($\star$) 3. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \geqslant n! + 1$, par croissance comparée (s_n) tend vers $+\infty$ et par conséquent $\dfrac{1}{s_{n+1} - 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On montre donc, en sommant les limites dans l'expression précédente, que (T_n) converge vers 1.