Devoir en temps libre 3

À rendre pour le mercredi 19 octobre

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est proscrit lors des devoirs sur table, il est donc fortement recommandé de s'habituer dès maintenant à ces nouvelles exigences.

Pour les devoirs maison, il est possible de travailler à plusieurs pour réfléchir aux exercices, de se faire aider (après avoir essayé) ou de poser des questions au professeur. Par contre, il est indispensable que la rédaction des exercices soit personnelle.

Exercice 1. On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

1. Préciser la parité de f et celle de g.
2. Étude de différentes relations entre les fonctions f et g.
   a. Calculer les dérivées de f et g, et les exprimer en fonction de f et de g.
   b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$.
   c. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $g(a+b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$.
3. Étude de la bijection réciproque de g.
   a. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
   b. Représenter dans un même repère le graphe de g et celui de g^{-1}.
   c. Pour $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $g(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et en déduire une expression explicite pour $g^{-1}(y)$.
   Indication : on pourra se ramener à une équation du second degré en $t = \mathrm{e}^x$.
   d. Montrer, à partir de l'expression obtenue en 3.c., que g^{-1} est impaire. Comment justifier ce résultat plus simplement ?
4. Étude de la bijection réciproque de f, restreinte à $\mathbb{R}_+$.
   a. La fonction f peut-elle être bijective sur $\mathbb{R}$?
   b. Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ vers J, un intervalle à préciser.
   c. Représenter dans un même repère le graphe de f (uniquement sur $\mathbb{R}_+$) et celui de f^{-1}.
   d. Vérifier que pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) + g(x) = \mathrm{e}^x$, puis à l'aide de la relation obtenue en 2.b., montrer que pour $y \in J$,
   $$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$
   e. Déterminer tous les antécédents (dans $\mathbb{R}_+$ et dans $\mathbb{R}_-$) de 2 par f, puis les antécédents de $\frac{1}{2}$.

On rencontrera f et g dans la suite du cours d'analyse : ce sont les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, notées cosh (ou ch) et sinh (ou sh). On note leurs réciproques argch et argsh.

Exercice 2. Nombres complexes.

1. Résoudre, pour $z \in \mathbb{C}$, les équations suivantes :
   a. $iz^2 + z - 6 - 2i = 0$
   b. $z^2 - (2-i)z + 3 - i = 0$
2. Donner la forme exponentielle de $3-\sqrt{3}i$ et $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ puis en déduire la forme algébrique de $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}\right)^{12}$.

Exercice 3. Le but de cet exercice est d'exprimer $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$. Pour cela on introduit le nombre complexe $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. Rappeler les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
2. Calculer ω^5.
3. Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$. *On pourra utiliser un résultat du chapitre sur les sommes.*
4. Justifier que $\omega^3 = \mathrm{e}^{-i\frac{4\pi}{5}}$ et que $\omega^4 = \mathrm{e}^{-\frac{2i\pi}{5}}$.
5. Déduire des deux questions précédentes que $1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0$.
6. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
7. Montrer que le nombre $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est une solution de l'équation suivante : $4x^2 + 2x - 1 = 0$.
8. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
9. Exprimer, à l'aide de racines carrées, la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.