Corrigé du devoir en temps libre 3

Exercice 1.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est une fonction paire.}}$

   Pour $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = -g(x)$, donc $\boxed{g \text{ est une fonction impaire.}}$

2. a. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = g(x)$ et $g'(x) = f(x)$.

   b. *Deux méthodes possibles : développer les carrés et simplifier, ou utiliser la dérivée.*
   Notons $h : x \mapsto f(x)^2 - g(x)^2$. La fonction h est dérivable par somme et produit de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 2f'(x)f(x) - 2g'(x)g(x) = 2g(x)f(x) - 2f(x)g(x) = 0$$

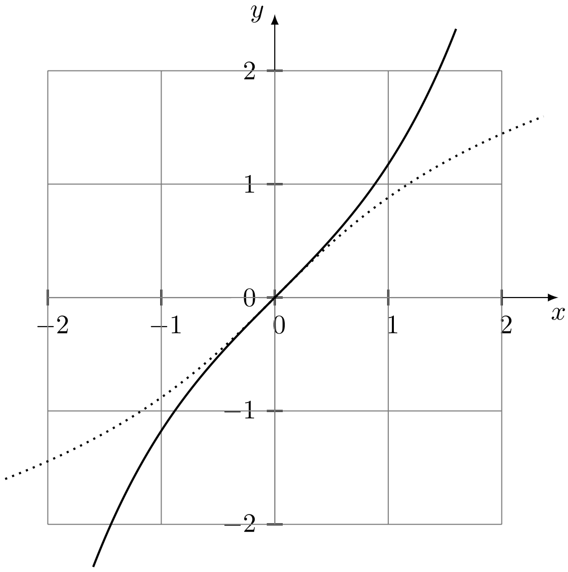
   Ainsi, h est constante sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = f(0)^2 - g(0)^2 = 1$, donc $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 - g(x)^2 = 1}$.

   c. Pour a et $b \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\boxed{f(a)g(b) + f(b)g(a)} &= \frac{e^{a+b} - e^{a-b} + e^{-a+b} - e^{-a-b}}{4} + \frac{e^{b+a} - e^{b-a} + e^{-b+a} - e^{-b-a}}{4} \\ &= \frac{2e^{a+b} - 2e^{-a-b}}{4} \boxed{= g(a+b)}.\end{aligned}$$

3. a. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable) et on a vu que $g' = f$ et f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ (somme de deux exponentielles), donc g est strictement croissante.
   Ainsi g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]\lim\limits_{-\infty} g, \lim\limits_{+\infty} g[= \mathbb{R}$ (calcul de limites sans forme indéterminée).

   b. Graphe de la fonction g et de sa bijection réciproque (en pointillé).



   c. Pour $y \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad e^{x} - e^{-x} = 2y \quad \Leftrightarrow \quad (e^{x})^2 - 2ye^{x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x} = y + \sqrt{y^2+1}$$

   car le polynôme du second degré $X^2 - 2yX - 1$ a pour racines $y + \sqrt{y^2+1}$ et $y - \sqrt{y^2+1}$ et seule la première est strictement positive (et $e^{x} > 0$). Ainsi,

$$g(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$

   Autrement dit, l'unique antécédent de y par g est $\ln(y + \sqrt{1+y^2})$, ou encore

$$\boxed{g^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).}$$

d. Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors

$$g^{-1}(-y) = \ln(-y + \sqrt{1+y^2}) = \ln\Big(\Big(-y + \sqrt{1+y^2}\Big)\,\frac{y+\sqrt{1+y^2}}{y+\sqrt{1+y^2}}$$
$$\ln((1+y^2) - y^2) - \ln(y + \sqrt{1+y^2}) = -\ln(y+\sqrt{1+y^2}) = -g^{-1}(y),$$

donc $\boxed{g^{-1} \text{ est impaire sur } \mathbb{R}}$.

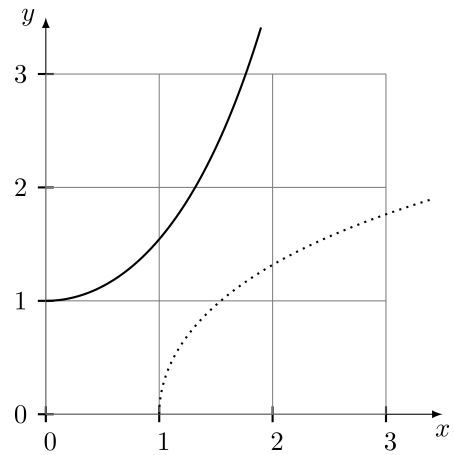
Autre justification (sans calcul) : $g^{-1}(-y)$ est par définition l'antécédent de $-y$ par g. Or comme g est impaire, on a $g\big(-g^{-1}(y)\big) = -g\big(g^{-1}(y)\big) = -y$. Donc $-g^{-1}(y)$ est un antécédent de $-y$ par g et par unicité de l'antécédent on a $g^{-1}(-y) = -g^{-1}(y)$. Ainsi, g^{-1} est impaire.

Remarque. Le raisonnement ci-dessous montre que la bijection réciproque d'une fonction impaire est toujours impaire, ce qui peut aussi se comprendre à l'aide des symétries des graphes.

4. a. La fonction f étant paire, on a $f(-1) = f(1)$, avec $-1 \neq 1$, donc $f(1)$ a plusieurs antécédents et $\boxed{f \text{ n'est pas bijective sur } \mathbb{R}.}$

b. Pour $x \in [0, +\infty[$, $f'(x) = g(x) \geqslant 0$ car $e^x \geqslant e^{-x}$. De plus, f' ne s'annule qu'en 0.
Ainsi, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ vers l'intervalle $[f(0), \lim_{+\infty} f[= \boxed{[1, +\infty[\,.}$

c. Graphe de la fonction f et de sa bijection réciproque (en pointillé).



d. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + g(x) = \frac{e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2e^x}{2} = e^x$.
Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt{f(x)^2 - 1}$ d'après la relation 2.b. et car $g(x) \geqslant 0$. Ainsi, pour $y \in [1, +\infty[$,

$$f(x) = y \quad \Rightarrow \quad f(x) + g(x) = y + \sqrt{y^2-1} \quad \Rightarrow \quad x = \ln(y + \sqrt{y^2-1}).$$

L'implication réciproque est aussi vraie car on sait que y admet au moins un antécédent.

e. D'après la question précédente, $\ln(2+\sqrt{3})$ est un antécédent de 2 par f (l'unique antécédent positif) et par parité de f, $-\ln(2+\sqrt{3})$ est l'unique antécédent négatif.
$\frac{1}{2}$ n'admet pas d'antécédent par f car il n'est pas dans l'intervalle image obtenu à la question 4.b.

Exercice 2. Nombres complexes.

1. a. Il s'agit d'une équation du second degré. Son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4i(-6-2i) = -7 + 24i$.
On cherche $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On note $\delta = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = \Re(\Delta) = -7 \\ 2xy = \mathrm{Im}(\Delta) = 24 \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{625} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 16 \\ 2xy = 24 \end{cases}$$

Ainsi $\delta = 3 + 4i$ vérifie $\delta^2 = \Delta$ (l'autre racine carrée de Δ étant $-3-4i$).
Les solutions de l'équation sont donc

$$z_1 = \frac{-1-\delta}{2i} = \frac{-4-4i}{2i} = \boxed{-2+2i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1+\delta}{2i} = \frac{2+4i}{2i} = \boxed{2-i}.$$

b. Le discriminant de l'équation est $\Delta = (2-i)^2 - 4(3-i) = -9 = (3i)^2$, autrement dit $\delta = 3i$ est une racine carrée de Δ.
Les solutions de l'équation sont

$$z_1 = \frac{2-i-3i}{2} = \boxed{1-2i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2-i+3i}{2} = \boxed{1+i}.$$

2. Les formes exponentielles sont $3-\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $\sqrt{2}+\sqrt{2}i = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$, ainsi

$$\left(\frac{3-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}\right)^{12} = \left(\frac{2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}}{2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^{12} = (\sqrt{3})^{12}\mathrm{e}^{-i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})\times 12} = 3^6\mathrm{e}^{-i5\pi} = -3^6 = \boxed{-729.}$$

Exercice 3.

1. $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$.
2. $\omega^5 = \left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5 = \mathrm{e}^{2i\pi} = \boxed{1}$ car $2\pi = 0 \pmod{2\pi}$.
3. $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = \sum_{k=0}^{4}\omega^k = \frac{1-\omega^5}{1-\omega}$ car $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}} \neq 1$, car $\frac{2\pi}{5} \neq 0 \pmod{2\pi}$.
   Comme $\omega^5 = 1$ d'après la question précédente, on trouve donc $\boxed{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0}$.
4. $\omega^3 = \mathrm{e}^{\frac{6\pi}{5}i} = \mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{5}i}$ car $\frac{6\pi}{5} = -\frac{4\pi}{5} \pmod{2\pi}$.
   $\omega^4 = \mathrm{e}^{\frac{8\pi}{5}i} = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{5}i}$ car $\frac{8\pi}{5} = -\frac{2\pi}{5} \pmod{2\pi}$.
5. En écrivant les différentes puissances de ω sous forme exponentielle et en utilisant les résultats de la question précédente, on obtient

$$0 = 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 1+\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{5}i}+\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{5}i}+\mathrm{e}^{-\frac{4\pi}{5}i}+\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{5}i}.$$

   On utilise ensuite la formule d'Euler : $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$, ce qui donne

$$\boxed{0 = 1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).}$$

6. D'après les formules de trigonométrie, on a pour tout $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos(2\theta)} = \cos(\theta+\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 \boxed{= 2\cos(\theta)^2 - 1.}$$

   Remarque. On pouvait aussi utiliser la formule de Moivre en écrivant $\cos(2\theta) = \Re\left[(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^2\right]$
7. On applique l'égalité de la question précédente pour $\theta = \frac{2\pi}{5}$, ce qui donne $\cos(\frac{4\pi}{5}) = 2\cos(\frac{2\pi}{5})^2 - 1$.
   En utilisant cela dans l'égalité obtenue à la question 5, on trouve donc

$$0 = 1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\left(2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2-1\right) = 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1,$$

   ce qui montre que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est bien solution de l'équation (du second degré) $4x^2+2x-1=0$.
8. L'équation $4x^2+2x-1=0$ est une équation du second degré, de discriminant $\Delta = 20$. Les solutions sont donc

$$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

   On sait, d'après la question 7, que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est une de ces deux solutions, et comme de plus $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est positif et x_1 est négatif, on obtient

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.}$$

9. En appliquant le résultat de la question 6. pour $\theta = \frac{\pi}{5}$, on obtient $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)^2 - 1$.
   Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est positif, cela donne

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{\cos(\frac{2\pi}{5})+1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+3}{8}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}+6}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{1+2\sqrt{5}+5}}{4} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}}{4} = \boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$