Devoir en temps libre 4

À rendre pour le lundi 7 novembre

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est proscrit lors des devoirs sur table, il est donc fortement recommandé de s'habituer dès maintenant à ces nouvelles exigences.

Pour les devoirs maison, il est possible de travailler à plusieurs pour réfléchir aux exercices, de se faire aider (après avoir essayé) ou de poser des questions au professeur. Par contre, il est indispensable que la rédaction des exercices soit personnelle.

Exercice 1. Déterminer le terme général des deux suites suivantes, définies par une récurrence double :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} + i, \\ u_1 = \frac{3}{2} i, \\ u_{n+2} = \frac{(1+i)}{2} u_{n+1} + \frac{(1-i)}{2} u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 1, \\ v_1 = 0, \\ v_{n+2} = 3\sqrt{3} v_{n+1} - 9 v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Placer sur le plan complexe les points d'affixe u_k pour k allant de 0 à 8.
Indice : pour s'en sortir avec très peu de calculs, mettre sous forme exponentielle la racine non réelle de l'équation caractéristique,

Exercice 2. Pour $n \geqslant 2$, on considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, que l'on note $(E_n) : z^n + z + 1 = 0$.

Le but de l'exercice est de démontrer que ses solutions sont toutes de module strictement inférieur à $\sqrt{2}$.

1. Cas $n = 2$.
   a. Résoudre l'équation (E_2).
   b. Conclure que les solutions de (E_2) sont de module strictement inférieur à $\sqrt{2}$.
2. Cas $n = 3$.
   a. En étudiant la fonction $f : x \mapsto x^3 + x + 1$, montrer que (E_3) admet une unique solution réelle que l'on notera a.
   b. Justifier que $-1 < a < -\frac{1}{2}$.
   c. On suppose que $b \in \mathbb{C}$ est solution de (E_3). Montrer que $\overline{b}$ est aussi solution de (E_3).

   On admet que l'on a la factorisation suivante : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + z + 1 = (z - a)(z - b)(z - \overline{b})$ où b et $\overline{b}$ sont les deux autres solutions, complexes conjuguées l'une de l'autre, de (E_3).

   d. En déduire que $-ab\overline{b} = 1$.
   e. Conclure que les solutions de (E_3) sont de module strictement inférieur à $\sqrt{2}$.
3. Cas $n \geqslant 4$.
   a. Montrer que si z est solution de (E_n), alors $|z|^n \leqslant |z| + 1$.
   b. Donner le tableau de variation de $g_n : x \mapsto x^n - x - 1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   c. En déduire que le signe de g_n sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.
   d. Conclure que les solutions de (E_n) sont de module strictement inférieur à $\sqrt{2}$.

Question bonus : déterminer une relation de Bezout entre 98 et 57. Sont-ils premiers entre eux ?

Bonnes vacances !