Corrigé du devoir en temps libre 4

Exercice 1. — L'équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $r^2 - \frac{(1+i)}{2}r - \frac{(1-i)}{2} = 0$. Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est

$$\Delta = \left(\frac{(1+i)}{2}\right)^2 + 4\frac{(1-i)}{2} = \frac{2i}{4} + 4\frac{(1-i)}{2} = \frac{4-3i}{2}.$$

Déterminons les racines carrés de Δ sous forme algébrique : si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$(x+iy)^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| = \frac{\sqrt{4^2+3^2}}{2} = \frac{5}{2} \\ x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Comme Δ est un complexe non nul, il admet exactement deux racines carrées complexes, opposées l'une de l'autre. Si $x+iy$ est une telle racine, en sommant les deux premières lignes, on obtient $2x^2 = \frac{9}{2}$, c'est-à-dire $x^2 = \frac{9}{4}$, et la deuxième ligne nous donne $y^2 = x^2 - 2 = \frac{1}{4}$. La troisième ligne indique que x et y sont nécessairement de signes opposés. Les deux racines carrées de Δ sont donc $\pm\frac{3-i}{2}$. Par conséquence, les racines de l'équation caractéristiques sont

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+i}{2} + \frac{3-i}{2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+i}{2} - \frac{3-i}{2}\right) = \frac{-1+i}{2}.$$

Il existe alors deux constantes complexes A et B telles que le terme général de la suite s'écrit à l'aide de ces racines :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

Déterminons ces constantes à l'aide des données initiales : si

$$\begin{cases} \frac{3}{2} + i = u_0 = A + B \\ \frac{3}{2}i = u_1 = Ar_1 + Br_2, \end{cases}$$

alors en ôtant la deuxième ligne à la première, comme $r_1 = 1$, on obtient

$$\frac{3}{2} + i - \frac{3}{2}i = B(1 - r_2) = B\left(1 - \frac{-1+i}{2}\right) = B\left(\frac{3}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

donc en divisant à gauche et à droite par $\frac{3}{2} - \frac{i}{2}$ qui est un complexe non nul, il vient $B = 1$. Ensuite la première ligne donne $A = \frac{3}{2} + i - B = \frac{1}{2} + i$. Ainsi si A et B sont les constantes associées à (u_n), on a nécessairement $(A,B) = (\frac{1}{2} + i, 1)$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n = \frac{1}{2} + i + \left(\frac{-1+i}{2}\right)^n.}$$

On met comme conseillé $\frac{i-1}{2}$ sous forme exponentielle : $\frac{i-1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(3i\pi/4)$. On a alors que les points d'affixes $u_n = (\frac{1}{2} + i) + \frac{1}{\sqrt{2}^n}\exp(i3n\pi/4)$ forment une spirale s'enroulant asymptotiquement sur le point L d'affixe $\frac{1}{2} + i$, voir Figure 1.

— L'équation caractéristique associée à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $r^2 - 3\sqrt{3}r + 9 = 0$. Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est

$$\Delta = (3\sqrt{3})^2 - 4 \times 9 = -9.$$

Le discriminant est réel et strictement négatif, ses racines carrées sont donc $\pm 3i$ et les racines de l'équation caractéristiques sont complexes conjuguées :

$$r = \frac{3\sqrt{3} + 3i}{2} \quad \text{et} \quad \bar{r} = \frac{3\sqrt{3} - 3i}{2}$$

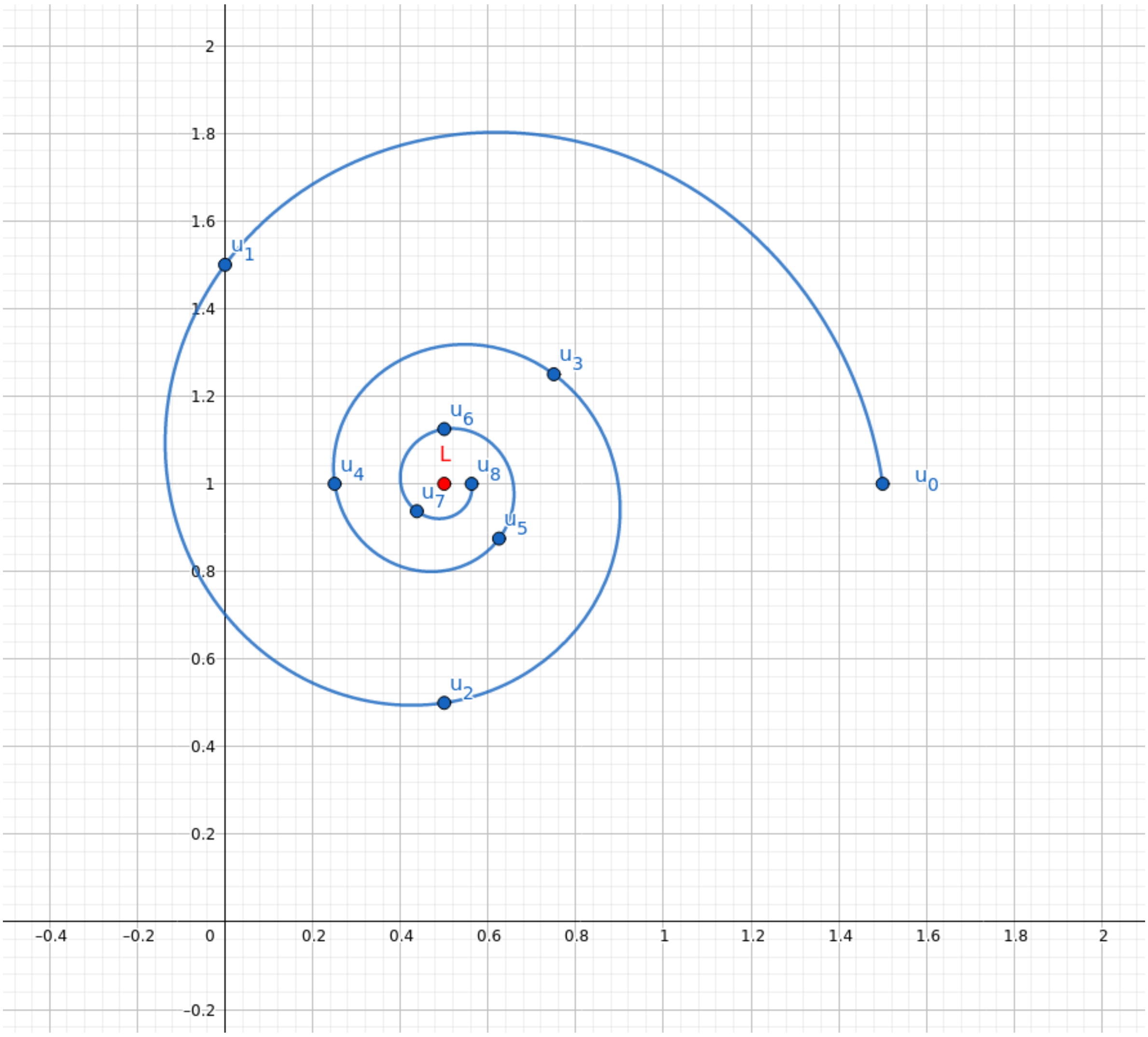

FIGURE 1 – Les 8 premiers termes de la suite u_n, dessinés avec GeoGebra

On met r sous forme exponentielle par identification d'une $\mathrm{e}^{i\theta}$ bien connue :

$$r = \frac{3\sqrt{3}+3i}{2} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = 3\mathrm{e}^{i\pi/6}$$

Il existe alors des constantes réelles A et B telles que le terme général de la suite s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = A3^n\cos(n\pi/6) + B3^n\sin(n\pi/6).$$

Déterminons ces constantes à l'aide des données initiales :

$$\begin{cases} 1 = v_0 = A \\ 0 = v_1 = 3A\cos(\pi/6) + 3B\sin(\pi/6) \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ 0 = 3A\frac{\sqrt{3}}{2} + 3B\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ 0 = \sqrt{3} + B \end{cases}$$

Ainsi si A et B sont les constantes associées à (v_n), on a nécessairement $(A,B) = (1, -\sqrt{3})$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 3^n\cos(n\pi/6) - \sqrt{3}\times 3^n\sin(n\pi/6).}$$

Exercice 2.

1. a. $(E_2) : z^2+z+1 = 0$ est une équation polynomiale de degré 2, dont le discriminant est $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$. Ainsi, ses solutions sont

$$\boxed{j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{j} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}.$$

Ce sont aussi les deux racines 3-ièmes de l'unité différentes de 1.

b. Comme j et $\overline{j}$ sont racines de l'unité, en particulier $|j| = |\overline{j}| = 1 < \sqrt{2}$, donc les solutions de (E_2) sont toutes de module strictement inférieur à $\sqrt{2}$.

2. a. La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2+1 > 0$.
Ainsi, f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (car $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$).
On en déduit que 0 admet un unique antécédent par f que l'on note a. Cela signifie que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 0 \iff x^3+x+1 = 0 \iff x = a$$

ou autrement dit, $\boxed{a \text{ est l'unique solution réelle de } (E_3).}$

b. On a $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8} > 0$ et $f(-1) = -1 < 0$, donc $f(-1) < f(a) < f(-\frac{1}{2})$, et par croissance de f, on en déduit que $\boxed{-1 < a < -\frac{1}{2}.}$

c. Supposons que $b \in \mathbb{C}$ est solution de (E_3), c'est à dire $b^3+b+1 = 0$.
On a alors, d'après les règles de calcul du conjugué, $0 = \overline{0} = \overline{b^3+b+1} = \overline{b}^3 + \overline{b} + 1$, ce qui montre que $\underline{\overline{b} \text{ est solution de } (E_3)}$.

d. D'après la factorisation admise, et en évaluant pour $z = 0$, on obtient $1 = (-a)(-b)(-\overline{b}) = -ab\overline{b}$.

e. D'après la question précédente, $|b|^2 = b\overline{b} = \frac{1}{-a}$, et d'après (b), $1 < \frac{1}{-a} < 2$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_-^\star$ où vivent -1, a et $-\frac{1}{2}$.
Ainsi, $|b| = |\overline{b}| < \sqrt{2}$, et comme $|a| < 1 < \sqrt{2}$, on a bien vérifié que toutes les solutions de (E_3) sont de module strictement inférieur à $\sqrt{2}$.

3. a. Supposons que $z \in \mathbb{C}$ est une solution de (E_n). On a donc $z^n = -z-1$ et donc

$$|z|^n = |z^n| = |-z-1| = |z+1| \leqslant |z|+1 \ \text{ d'après l'inégalité triangulaire.}$$

b. La fonction g_n est dérivable (car polynomiale) et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g_n'(x) = nx^{n-1}-1$. Ainsi

$$g_n'(x) \geqslant 0 \iff nx^{n-1} \geqslant 1 \iff x \geqslant \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

On note $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ et le tableau de variation de g_n sur $\mathbb{R}_+$ est :

x	0	a_n	$+\infty$
$g_n'(x)$	$-$	0	$+$
g_n	$-1 \searrow$	$g_n(a_n)$	$\nearrow +\infty$

c. On rappel que $n \geqslant 4$, donc $\sqrt{2}^n \geqslant \sqrt{2}^4 = 2^2 = 4$ et ainsi $g_n(\sqrt{2}) \geqslant 4 - \sqrt{2} - 1 > 0$ car $3 > \sqrt{2}$. D'après le tableau de variation de la question précédente, g_n est négative sur $[0, a_n]$ et comme $g_n(\sqrt{2}) > 0$, on a nécessairement $\sqrt{2} > a_n$. Ainsi, g_n est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$ (car $\subset [a_n, +\infty[$) et donc strictement positive sur cet intervalle (toujours car $g_n(\sqrt{2}) > 0$).

d. Si $|z| \geqslant 2$, on a d'après la question précédente $g_n(|z|) > 0$, c'est à dire $|z|^n - |z| - 1 > 0$. La contraposée du résultat obtenu en 3.(a) permet alors de déduire que $|z|$ n'est pas solution de (E_n).
Autrement dit, on a montré que

$$|z| \geqslant \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad z \text{ n'est pas solution de } (E_n)\ ,$$

ce qui est bien équivalent (par contraposée) à

$$z \text{ est pas solution de } (E_n) \quad \Longrightarrow \quad |z| < \sqrt{2}\ .$$

Question bonus : on applique l'algorithme d'Euclide à 98 et 57. Il y a beaucoup d'étapes !

$$\begin{aligned}
98 &= 1 \times 57 + 41 &\quad (1)\\
57 &= 1 \times 41 + 16 &\quad (2)\\
41 &= 2 \times 16 + 9 &\quad (3)\\
16 &= 1 \times 9 + 7 &\quad (4)\\
9 &= 1 \times 7 + 2 &\quad (5)\\
7 &= 3 \times 2 + \boxed{1} &\quad (6)\\
3 &= 3 \times 1 + 0. &\quad (7)
\end{aligned}$$

Le pgcd de 98 et 57 est donc 1, ces nombres sont donc premiers entre eux. On remonte l'algorithme depuis le 1 encadré pour obtenir une combinaison linéaire de 98 et de 57 à coefficients entiers :

$$1 \underset{(6)}{=} 7 - 3 \times 2 \underset{(5)}{=} 7 - 3(9-7) = 4 \times 7 - 3 \times 9 \underset{(4)}{=} 4(16-9) - 3 \times 9 = 4 \times 16 - 7 \times 9 = \cdots$$

On respire un coup et on y retourne :

$$\cdots \underset{(3)}{=} 4 \times 16 - 7(41 - 2 \times 16) = 18 \times 16 - 7 \times 41 \underset{(2)}{=} 18(57-41) - 7 \times 41 = 18 \times 57 - 25 \times 41 \underset{(1)}{=} 18 \times 57 - 25(98-57)$$

Ce qui nous donne pour finir

$$\boxed{1 = -25 \times 98 + 43 \times 57.}$$