Devoir en temps libre 5 : équations différentielles

À rendre pour le 21 novembre

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est proscrit lors des devoirs sur table, il est donc fortement recommandé de s'habituer dès maintenant à ces nouvelles exigences.

Pour les devoirs maison, il est possible de travailler à plusieurs pour réfléchir aux exercices, de se faire aider (après avoir essayé) ou de poser des questions au professeur. Par contre, il est indispensable que la rédaction des exercices soit personnelle.

La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont primordiales dans l'appréciation d'une copie de mathématiques.

Exercice 1 (Un oscillateur soumis à une excitation périodique)**.** Soient ω et ω_0 deux réels strictement positifs et distincts. Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x)'' + \omega^2 y(x) = \cos(\omega_0 x) \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2 (Un problème de raccord)**.** Dans cet exercice, on cherche à trouver les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ de l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x(x-1)y(x)' - (3x-1)y(x) + x^2(x+1) = 0. \tag{E}$$

1. Chercher une solution particulière à (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
2. Déterminer des constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$,
$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$
3. Peut-on écrire (E) sous forme normalisée sur $\mathbb{R}$ tout entier ? À quels intervalles I_1, I_2 et I_3 faudrait-il restreindre l'étude pour pouvoir déterminer les solutions ? Résoudre l'équation différentielle sur ces intervalles.
4. On procède par analyse et synthèse. On suppose que f est une solution de (E). Montrer qu'il existe trois constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} \text{si } x \in I_1, \quad f(x) = x^2 + \lambda_1 x(x-1)^2, \\ \text{si } x \in I_2, \quad f(x) = x^2 + \lambda_2 x(x-1)^2, \\ \text{si } x \in I_3, \quad f(x) = x^2 + \lambda_3 x(x-1)^2. \end{cases}$$
5. On a supposé que la fonction f était de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. C'est-à-dire, en particulier, que f' est continue en tout point qui n'est pas dans $I_1 \cup I_2 \cup I_3$. Quelle conséquence peut-on en déduire sur les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$?
6. On a effectué l'analyse, procéder maintenant à la synthèse et conclure.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

1. Exhiber une solution évidente de ce problème.

On considère maintenant une solution au problème, notée f.

2. Calculer $f(0)$.
3. Justifier que f est solution de l'équation différentielle du premier ordre
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x) + Ce^x,$$
où C est une constante qu'on explicitera.

4. Déterminer les solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x)' = y(x) + Ce^x \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

5. Qu'a-t-on montré ? Conclure.